VOLUME-1, ISSUE-11

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Фатима Алимбетова
Национальный университет Узбекистана
Алгебра и функциональный анализ

Теория уравнений смешанного типа имеет сравнительно недолгую историю. Уравнения смешанного типа стали объектом систематических исследований с конца сороковых годов прошлого столетия. Возникшие в приложениях проблемы, в частности проблемы околозвукового течения сжимаемой среды и безмоментной теории оболочек, описываются уравнениями смешанного типа второго порядка, для которых задача Трикоми, так и, другие ее математические обобщения имеют вполне определенный физический или геометрический смысл. Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа, теперь известные как "Задача Трикоми" и "Задача Геллерстедта". Ф.И.Франкль обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И.Н.Векуа указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. А.В.Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для задачи Трикоми. Позднее он был доказан и для других краевых задач для уравнений смешанного типа. В работах [1]-[6] и многих других теория уравнений смешанного типа развивалась в различных направлениях.
В настоящей работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка.

Постановка задачи. В области $D=\{(x,t):0<x<q,\ -T<t<T, T>0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt}+\operatorname{sgn}t\cdot u_{xx}=f(x,t), \quad (1)$$

где $f(x,t)-$ заданная функция.

Обозначим $D^{+}=D\cap(t>0), D^{-}=D\cap(t<0)$.

Задача A. Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,+0)=\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,-0), \quad k=0,1 \qquad 0\le x\le q, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(0,t)=u(q,t)=0, \qquad -T\le t\le T, \quad (3)$$

$$u(x,T)=0, \qquad 0\le x\le q, \quad (4)$$

$$u(x,-T)=0, \qquad 0\le x\le q, \quad (5)$$

Единственность решения.

Теорема 1. Пусть числа q и T такие, что при $k=1,2...$

$$P_k(T)\equiv\left|sh\left(\frac{k\pi}{q}\right)T\cos\left(\frac{k\pi}{q}\right)T+ch\left(\frac{k\pi}{q}\right)T\sin\left(\frac{k\pi}{q}\right)T\right|\ge\delta_0>0, \quad (6)$$

тогда если существует регулярное решение задачи А, то оно единственно.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u1(x,t)$ и $u2\ (x,t)$ задачи. Их разность удовлетворяет однородному уравнению (1) и условиям (2) - (5).

Известно, что функции

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\lambda_k x, \quad \lambda_k=\frac{k\pi}{q}, \quad k=1,2,..., \quad (7)$$

образуют в $L_2(0,q)$ полную ортонормированную систему.

Обозначим

$$u(x,t)=\begin{cases}u^{+}(x,t), & (x,t)\in D^{+}\\ u^{-}(x,t), & (x,t)\in D^{-}\end{cases}$$

Рассмотрим интегралы

$$\int_0^q u^{+}(x,t)X_k(x)dx=\alpha_k(t), \quad k=1,2,\dots . \quad t>0, \quad (8)$$

а для отрицательных значений

$$\int_0^q u^{-}(x,t)X_k(x)dx=\beta_k(t), \ k=1,2,\dots . \quad t<0 \quad (9)$$

где функции $X_n(x)$ определены в (7).

На основании (8), (9) вводим функции

$$\alpha_{k,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{q-\varepsilon}u(x,t)X_k(x)dx, \ k=1,2,..., \ t>0, \ 0<\varepsilon<q, \quad (10)$$

$$\beta_{k,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{q-\varepsilon}u(x,t)X_k(x)dx, \ k=1,2,..., \ t<0, \ 0<\varepsilon<q, \quad (11)$$

причём $(\varepsilon, q-\varepsilon) \neq \varnothing$. Дифференцируя (10) и (11) два раза по t, и интегрируя два раза по частям, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учётом условий (3) получаем уравнения

$$\alpha_k''(t) - \lambda_k^2 \alpha_k(t) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots, \quad t > 0, \tag{12}$$

$$\beta_k''(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots, \quad t < 0 \tag{13}$$

Решая уравнения (12) и (13) при условиях $\alpha_k(T) = 0$, $\beta_k(-T) = 0$, $\alpha_k(0) = \beta_k(0), \alpha_k'(0) = \beta_k'(0)$ получаем $\alpha_k(t) = 0, \beta_k(t) = 0$ при $t \in [-T, T]$. Тогда, правые части равенства (8) и (9) будут равны нулю. Отсюда следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе (7). Следовательно $u(x,t) \equiv 0$.

Литература

1. Аманов Д., Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвёртого порядка //Узб. мат. журн. – Ташкент, 2008. - №3. - С.13-22
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959. - 164с.
3. Джураев Т. Д., Сопуев А. Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан. 1986. - 220 с