TECHNICAL SCIENCE RESEARCH IN UZBEKISTAN
ISSN (E): 2992-9148
ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2024
VOLUME-2, ISSUE-1

TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH. KOSHI VA KOSHI BUNYAKOVISKI TENGSIZLIGI VA UNING TADBIQI.

ABDULLAYEV HUMOYIDDIN BAXTIYOR O'G'LI
Fizika-Matematika fakulteti
Matematika ta'lim yo'nalishi 3-kurs
Ilmiy rahbar: Bozorov Jo'rabek Tog'aymurodovich
Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori.

Annotatsiya: Biz tengsizliklarni isbotlashda Koshi va Koshi Bunyakoviski tengsizliklaridan foydalanib, tengsizlikni isbotlashni sodda uslini ushbu maqolada ko'rib o'tamiz.

Kalit so'zlar: Koshi tengsizligi, Koshi Bunyakoviski tengsizligi, sonli tengsizlik va ularning xossalari.

1. *Sonli tengsizliklar va ularning xossalari*.

Ta'rif: Agar $a-b$ ayirma musbat son bo'lsa, a soni b sonidan katta deyiladi va bu munosabat $a>b$ shaklida yoziladi. Agar $a-b$ ayirma manfiy bo'lsa, a soni b sonidan kichik deyiladi va $a<b$ shaklida yoziladi.

Istalgan a va b sonlar uchun quyidagi uchta munosabatdan faqat bittasi o'rinli:

1. $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;
2. $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$;
3. $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

Sonli tengsizliklar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'sa, $a>c$ bo'ladi (tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasi).

2^0. Agar $a>b$ va $c\in R$ bo'lsa, $a+c>b+c$ bo'ladi.

3^0. Agar $a>b$ va $c>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot c$ bo'ladi.

4^0. Agar $a>b$ va $c<0$ bo'lsa, $a\cdot c<b\cdot c$ bo'ladi.

5^0. Agar $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, $a+c>b+d$ bo'ladi.

6^0. Agar $a>b>0$ va $c>d>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot d$ bo'ladi.

7^0. Agar $a>b>0$ va $n\in N$ bo'lsa, $a^n>b^n$ bo'ladi ($n-$ toq son bo'lganda $b>0$ shart ortiqcha).

Misol-1. Istalgan a, b va c sonlari uchun

$$2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$$

ISSN (E): 2992-9148
ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2024
VOLUME-2, ISSUE-1

ekanligini isbotlang.

Yechish: Istalgan a, b va c sonlari uchun

$$(2a^2 + b^2 + c^2) - 2a(b + c) \geq 0$$

ayirmani manfiy emasligini ko'rsatamiz:

$$(2a^2 + b^2 + c^2) - 2a(b + c) = (a^2 + 2ab + b^2) - 2a(b + c)$$
$$= (a - b)^2 + (a - c)^2 \,.$$

Istalgan sonning kvadrati nomanfiy son bo'lgani uchun $(a - b)^2 \geq 0$ va $(a - c2\geq 0$. Demak, $(2a2+b2+c2)-2a(b+c)$ istalgan a, b va c sonlari uchun manfiy emas. Shuning uchun berilgan tengsizlik istalgan a, b va c sonlari uchun o'rinli. Jumladan, tenglik belgisi $a = b = c$ bo'lgandagina bajariladi. Δ

Tengsizlikning to'g'riligini ko'rsatish uchun uning har ikkala qismining ayirmasini musbat yoki manfiyligini aniqlash, ya'ni yuqoradagi misoldagidek bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlashga harakat qilish ayrim hollarda qiyinchiliklarni tug'diradi. Shuning uchun tengsizliklarni isbotlashda tengsizliklarning xossalaridan foydalanish tavsiya etiladi.

2. *Koshi va Koshi Bunyakoviski tengsizligi.*

Teorema(Koshi): Manfiy bo'lmagan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlarning o'rta giometrik qiymati
o'rta arfimetik qiymatidan oshmaydi.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \qquad (1)$$

(1) ko'rinishidagi tengsizlik ***Koshi tengsizligi*** deyiladi.

Agar $\sqrt[n]{x_1} = a_1$, $\sqrt[n]{x_2} = a_2$, … , $\sqrt[n]{x_n} = a_n$ desak,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_n^n}{n} \qquad (2)$$

(2) ko'rinishidagi tengsizlika keladi.

Isbot: $n = 2$ bo'gan holatda qaraymiz:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \;\; => \;\; x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \;\; \geq 0$$

ISSN (E): 2992-9148
ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2024
VOLUME-2, ISSUE-1

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

Tengsizlik isbotlandi. Tengsizlik doimo musbat.

Teoremani umumiy holda isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanamaiz.

Lemma. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ lar ixtioriy musbat sonlar bo'lib, $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ bo'lsa, u xolda $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$ bo'ladi.

Koshi teoremasini umumiy holda isbotlaymiz.

Isbot: Biz quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} \\ a_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} \\ ------------- \\ a_n = \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$$

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}} \geq 0$$

bundan

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, Teorema isbotlandi.

Misol-2. $x, y > 0$ bo'lsa,
$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$
tengsizlikni isbotlang.
Yechish: Bu tengsizlikni yechish uchun Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq xy + x + y$$

ISSN (E): 2992-9148
ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2024
VOLUME-2, ISSUE-1

$$+\begin{cases} \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \geq xy, \\ \frac{y^2}{2}+\frac{1}{2} \geq y, \\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \geq x, \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2+1 \geq xy+x+y.$$

tengsizlik bajariladi. Demak, tengsizlik o'rinli.

Teorema(Koshi Bunyakoviski): $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ haqiqiy sonlar jamlanmasi uchun

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \qquad (3)$$

(3) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu (3) tengsizlika ***Koshi Bunyakoviski*** tengsizligi deyiladi.

Isbot: Bizga malumki

$$\begin{cases} (a_1+b_1x)^2 \geq 0 \\ (a_2+b_2x)^2 \geq 0 \\ - - - - - - - \\ (a_n+b_nx)^2 \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) tengsizlik doimo musbat va tengsizlik bajariladi. (4) tengsizlikni har bir tengsizligini kvadratga oshirsak va qo'shib guruhlasak,

$$+\begin{cases} a_1^2+2a_1b_1x+b_1^2x^2 \geq 0 \\ a_2^2+2a_2b_2x+b_2^2x^2 \geq 0 \\ - - - - - - - - - - \\ a_{n-1}^2+2a_{n-1}b_{n-1}x+b_{n-1}^2x^2 \geq 0 \\ a_n^2+2a_nb_nx+b_n^2x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+2x(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)+x^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq 0$$

$$x^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+2x(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq 0 \qquad (5)$$

(5) kvadrat tengsizlika keladi. Bu kvadrat tengsizlikni yechsak:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

quyidagi tengsizlika kelamiz. Bu tengsizlik **Koshi Bunyokoviski tengsizligi** deyladi. Isbotlandi.

ISSN (E): 2992-9148
ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2024
VOLUME-2, ISSUE-1

Misol-3. Ushbu

$$y = acosx + bsinx$$

funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

Yechish: Biz

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad b_1 = cosx, \qquad b_2 = sinx,$$

deb olib Koshi Bunyakoviski tengsizligidan foydalansak.

$$(acosx + bsinx)^2 \leq (a^2 + b^2)((cosx)^2 + (sinx)^2)$$
$$(acosx + bsinx)^2 \leq (a^2 + b^2)$$
$$|acosx + bsinx| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq acosx + bsinx \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Funksiyaning qiymatlar sohasi $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq acosx + bsinx \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ dan iborat bo'ladi. Misol yechildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T.Azlariv X.Mansurov Matematik Analiz 1-qisim toshkent "O'zbekiston "
1995-yil.
2. Б.П.Демитович Сборник задач и упреажнений по математичискомй
анализу Маскуа "наука" 1990-год
3. A.U.Abduhamidov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov ''Algebra vamatematik analiz asoslari '' 1-2 qism. '' O'quvchi ''.T.2008.
4. Nassiet S , Torte D , Rivoallan L , Matematik Analiz. Didier, Paris, 1995.
5. Alimov Sh.A va b. Algebra va analiz asoslari, 10-11. ''O'qituvchi'',1996.
6. http://www.ziyonet.uz
7. http://www.edu.u