

## О ДИФРАКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛНАХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

**Алмуратов Шавкат Нарпулатович**

д.ф.ф.-м.н. (PhD) доц. Университет образования РЕНЕССАНС.

Г.Ташкент

*E-mail:* [al\\_shavkat@mail.ru](mailto:al_shavkat@mail.ru)

**Тошбоева Наргиза Юлдашевна**

Университет образования UNIVERSITY OF BUSINESS AND SCIENCE.

Г.Наманган

*E-mail:* [al\\_shavkat@mail.ru](mailto:al_shavkat@mail.ru)

**Анотация.** В статье рассматривано взаимодействие гармонических волн с жестким включением в вязкоупругой среде. Показано влияние параметров вязкости на напряжено-деформированное состояние цилиндрического тела.

**Ключевые слова:** вязкоупругий, прочность, радиальные напряжения, тангенциальные напряжения, сейсмостойкий, нагрузка.

В последнее годы объем строительства подземных и надземных сооружений, в частности, цилиндрического типа, в сейсмически активных районах возрастает, вопросы обеспечения прочности и надежности подземных и надземных сооружений при сейсмических воздействиях остаются актуальными. Подземные сооружения (тоннели, ракетные шахты цилиндрического типа, резервуары, бункеры, водопропускные сооружения и т.п.) принадлежат к весьма ответственным объектам, причем удельный объем их особенно велик в сейсмических районах. Комплекс проблем обеспечения сейсмостойкости сооружений может быть, как известно, условно разделен на три основные группы:

- 1) определение сейсмических нагрузок,
- 2) определение сейсмостойкого состояния
- 3) учет сеймонапряженного состояния в расчетах и при практическом проведении антисейсмических мероприятий.

Методы учета сейсмических нагрузок при проектировании подземных сооружений [1-4] выявили необходимость более тщательного учета сейсмического фактора при проектировании.

Постановка задачи и методы решения. Рассмотрим установившиеся колебания жесткого включения. Уравнения движения окружающей среды и цилиндрического тела имеют вид

$$\rho_j \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = \mu_j \nabla u_j + (\lambda_j + \mu_j) \text{grad div } U_j, j = 1, 2, \dots, n + 1. (1)$$

Где  $\lambda_j, \mu_j$  - операторы коэффициентов Ламе, которые имеют вид

$$\lambda_j \varphi(t) = \lambda_j \left[ \varphi(t) - \int_a^t R_{\lambda_j}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right], (2)$$

$$\mu_j \varphi(t) = \mu_j \left[ \varphi(t) - \int_{-\infty}^t R_{\mu_j}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right],$$

$\lambda_j, \mu_j$  - мгновенные коэффициенты Ламе;  $R_{\lambda_j}, R_{\mu_j}$  - ядра релаксации;

$\varphi(t)$  - произвольная функция времени;  $\rho_j$  - плотность материала;

$U_j \{U_{rj}, U_{\theta j}, U_{zj}\}$  - вектор перемещений окружающей среды.

Перемещение  $U_j$  представим в виде

$$U_j = \text{grad} \varphi_j + \text{rot} \psi_j, \varphi_j(0, \psi_{1j}, \psi_{2j}) (3)$$

Подставляя (3) в (1), для  $\varphi_j$  и  $\psi_j$  получаем интегро-дифференциальные уравнения в виде

$$\nabla \varphi_j - \int_a^t [R_{\lambda_j}(t - \tau) + 2R_{\mu_j}(t - \tau)] \nabla \varphi_j d\tau = \frac{1}{C_{pj}^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}, (4)$$

$$\nabla \varphi_j - \int_a^t [R_{\mu_j}(t - \tau)] \nabla \varphi_j d\tau = \frac{1}{C_{sj}^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2},$$

где  $C_{pj}^2 = \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}$ ;  $C_{sj}^2 = \frac{\mu_j}{\rho_j}$ ;  $\nabla$  - оператор Лапласа в координатах  $r, \theta, z$ . Для упругой среды  $R_{\lambda_j} = R_{\mu_j} = 0$ .

Цилиндрическое тело 0 может быть абсолютно жестким, тогда линейные уравнения включения получим из закона Ньютона, который имеет следующий вид:

$$m \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} = F(t), I \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial t^2} = M(t), (5)$$

где

$$F(t) = \oint_C [\sigma^{(1)} + \sigma^{(S)}]_S n dS; (6)$$

$$M(t) = \oint_C r [\sigma^{(1)} + \sigma^{(S)}]_S n dS; (7)$$

$n$  - единичный вектор нормали к  $C$ ;  $r$  - радиус - вектор от центра масс до поверхности  $C$  жесткого включения;  $U$  и  $\Omega$  - поступательное и вращательное движение жесткого включения соответственно;  $m$  - масс включения;  $I$  - момент интеграции относительно главных осей, проходящих через центр масс. Граничные условия на  $C$  будут:

$$[U^{(p)} + U^{(S)}]_C = U(t) + \theta(t) * r, (8)$$

где  $U^{(p)}$  и  $U^{(S)}$  - вектор перемещений падающих и отраженных волн,  $U$  и  $\theta$  зависят от падающих и отраженных полей. Если включение неподвижное, то  $U(t) = \theta(t) = 0$ ,  $[U^{(p)} + U^{(S)}]_C = 0$ .

Пусть на жесткое тело падает плоская гармоническая волна расширения в виде

$$\Phi^{(p)} = A e^{i(ax - \omega t)} = A \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^2 J_n(ar) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}, (9)$$

где  $E_0 = 1$ ;  $E_n = 2$ ;  $n \geq 1$ ;  $A = \text{const}$ ;  $J_n$  - функция Бесселя.

Общее решение волновых уравнений (4) представляющих отраженные волны (их потенциалы, удовлетворяющие условия изучения Зоммерфельда при  $n \rightarrow \infty$ ), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \phi^{(q)} \\ \phi^{(q)} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_n H_n^{(1)}(ar) \cos(n\theta) \\ B_n H_n^{(1)}(\beta r) \sin(n\theta) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. (10)$$

Здесь  $A_n$  и  $B_n$  - неопределенные коэффициенты;  $H_n^{(1)}$  - функция Ханкеля первого рода. Рассмотрим следующие задачи.

Пусть включение движется поступательно вместе с окружающей средой, тогда граничное условие (8) имеет вид  $U_r = U \cos(\theta)$ ,  $U_\theta = U \sin(\theta)$ , при  $\alpha = r$ . Если  $M$  - масса включения, то  $U$  определяется из уравнения движения Ньютона.

$$M U = \int_0^{2\pi} [\mathfrak{S}_{rr} \cos(\theta) - \mathfrak{S}_{r\theta} \sin(\theta)] \alpha d\theta,$$

где  $M = \pi r_B \alpha^2$ ;  $\rho_B$  – плотность включения.

Напряжения окружающей среды при  $r = \alpha$ ; имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{rr} &= \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( E_n i^n \varphi_0 \varepsilon_{11}^{(1)} + A_n \varepsilon_{41}^{(3)} + B_n \varepsilon_{43}^{(3)} \right) \cos(\theta) e^{-i\omega t}, \\ \mathfrak{S}_{r\theta} &= \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( E_n i^n \varphi_0 \varepsilon_{11}^{(1)} + A_n \varepsilon_{41}^{(3)} + B_n \varepsilon_{43}^{(3)} \right) \sin(\theta) e^{-i\omega t}, \quad (11) \\ \mathfrak{S}_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( E_n i^n \varphi_0 \varepsilon_{21}^{(1)} + A_n \varepsilon_{21}^{(3)} + B_n \varepsilon_{22}^{(3)} \right) \cos(\theta) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \varepsilon_{11}^{(1)} = \left( n^2 + n - \frac{a^2 a^2}{2} \right) J_n(\alpha\alpha) - \alpha\alpha J_{n-1}(\alpha\alpha);$$

$$\varepsilon_{11}^{(3)} = \left( n^2 + n - \frac{a^2 a^2}{2} \right) H_n^{(1)}(\alpha\alpha) - \alpha\alpha H_{n-1}^{(1)}(\alpha\alpha);$$

$$\varepsilon_{11}^{(3)} = n(n+1) H_n^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_{n-1}^{(1)}(\beta\alpha);$$

$$\varepsilon_{42}^{(1)} = -n[(n+)J_n(\alpha\alpha) - \alpha\alpha J_{n-1}(\alpha\alpha)];$$

$$\varepsilon_{41}^{(3)} = -n[(n+)H_n^{(1)}(\alpha\alpha) - \alpha\alpha H_{n-1}^{(1)}(\alpha\alpha)];$$

$$\varepsilon_{42}^{(1)} = \left( n^2 + n - \frac{\beta^2 a^2}{2} - \right) H_n^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_{n-1}^{(1)}(\beta\alpha);$$

$$\varepsilon_{21}^{(1)} = - \left( n^2 + n - \frac{a^2 a^2}{2} - a^2 a^2 \right) J_n(\alpha\alpha) - \alpha\alpha J_{n-1}(\alpha\alpha);$$

$$\varepsilon_{21}^{(1)} = - \left( n^2 + n - \frac{a^2 a^2}{2} - a^2 a^2 \right) H_n^{(1)}(\alpha\alpha) - \alpha\alpha H_{n-1}^{(1)}(\alpha\alpha);$$

$$J_{22}^{(3)} = -n[(n-1)H_n^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_{n-1}^{(1)}(\beta\alpha)].$$

Подставляя (10) в (9) и интегрируя и от полученное дифференциальное уравнение находим смещение жесткого включения

$$U = \zeta \frac{1}{a} [2iA_1 J_1(\alpha\alpha) + A_1 H_1(\alpha\alpha) + B_1 H_1(\alpha\alpha)].$$

где

$\zeta = \rho_c / \rho_B$ ;  $\rho_c, \rho_B$  - плотность окружающей среды и включения.

С учетом граничных условий (2.1.8) можно определить  $A_1$  и  $B_1$  в виде:

$$A_1 = \frac{2iA}{\Delta_1} [-4\zeta J_1(\alpha\alpha) H_1^{(1)}(\beta\alpha) + (1+\zeta) J_1(\beta\alpha)\beta\alpha H_0(\beta\alpha) + (1+\zeta) \alpha\alpha J_0(\alpha\alpha)H_1^{(1)}(\beta\alpha) - \alpha\beta^2\alpha^2 J_0(\alpha\alpha) H_0(\beta\alpha)].$$

$$B_1 = \frac{2A_1}{\delta_1\pi} 2(1-\zeta),$$

$$\Delta_1 = 4\zeta H_1^{(1)}(\alpha\alpha) H_1^{(1)}(\beta\alpha) - (1-\zeta) J_1(\beta\alpha)\beta\alpha H_0^{(1)}(\beta\alpha) H_1^{(1)}(\alpha\alpha) - (1-\zeta) \alpha\alpha H_0^{(1)}(\alpha\alpha) H_1^{(1)}(\beta\alpha) + \alpha\beta\alpha^2 H_0^{(1)}(\alpha\alpha) H_0^{(1)}(\beta\alpha).$$

При  $\zeta = 0$  получаем решение для фиксированного включения. Тогда выражения для перемещения и напряжения на поверхности жесткого включения имеет вид:

$$U_r = \frac{4A}{\pi\Delta_1} \zeta [2H_1^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_0^{(1)}(\beta\alpha) \cos(\theta)],$$

$$U_\theta = \frac{4A}{\pi\Delta_1} \zeta [2H_1^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_0^{(1)}(\beta\alpha) \sin(\theta)],$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\pi} \mu A \beta^2 \left\{ i [\alpha\alpha H_1^{(1)}(\alpha\alpha)]^{-1} - 2[(1+\zeta) H_1^{(1)}(\beta\alpha) - \beta\alpha H_0^{(1)}(\beta\alpha)] + \frac{\cos(\theta)}{\Delta_1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta\alpha H_1^{(1)}(\beta\alpha)}{\Delta_1} \cos(n\theta) \right\}, \quad (2.1.13)$$

$$\mathfrak{S}_{rr} = \frac{2}{\pi} \mu A \beta^2 \left\{ 2(1-\zeta) H_1^{(1)}(\beta\alpha) \frac{\cos(\theta)}{\Delta_1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \frac{n H_n^{(1)}(\beta\alpha)}{\Delta_1} \sin(n\theta) \right\}, \quad \mathfrak{S}_{\theta\theta} = \left( 1 - 2 \frac{a^2}{\beta^2} \right) \sigma_{rr}.$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи, когда волновое число  $\alpha\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha\alpha \gg 1$ . используем асимптотическое выражение функции Ханкеля малого и большого аргумента когда  $\alpha\alpha \ll 1$  –

$$U^*(\alpha\alpha) \rightarrow \frac{a^2 a^2}{4\zeta} [ \varkappa^2 (\zeta - 1) \ln(\varkappa\alpha) + \ln(\alpha\alpha) ] + i\pi \frac{a^2 a^2}{4\zeta} [(1 - \zeta)\varkappa^2 + (1 - \zeta)], \quad \text{где } \varkappa = \varepsilon(1-\nu) / (1-2\nu); U^* = U / i\phi_0\alpha. \text{ Если } \alpha\alpha \rightarrow 0, \text{ то } U^*(\alpha\alpha) \rightarrow 1. \text{ Когда } (\alpha\alpha) \gg 1 U^*(\alpha\alpha) \approx 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \zeta \sqrt{\frac{1}{(\alpha\alpha)^2}} \text{Exp}(-i\alpha\alpha + \omega t - 3/4\pi).$$

При  $(\alpha\alpha) \rightarrow \infty$  имеем  $U^* \rightarrow 0$ . Результаты расчетов приведены на рисунках 1. Видно, что увеличением плотности жесткого включения действительные и мнимые части собственных частот плавно увеличиваются. Когда  $\zeta=1$ , т.е.  $\rho_C = \rho_B$ , существует только одна собственная частота. Как видно на рисунках 1 и 2, при

совпадении частоты вынужденных возмущений с собственной  $\Omega_R = \omega a / C_p$  происходит резонанс, но резонанс имеет конечный пик. Вторая собственная частота почти не влияет на значение амплитуды, т.е. вторая собственная частота сопровождается большим затуханием энергии. Аналогичные результаты получены для вязкоупругих задач, когда  $a = 0,048$  малой вязкости сравнивали с упругими случаями. Резонансные пики в вязкоупругой задаче снижаются на 15-20% и смещаются влево. Действительно радиальные и тангенциальные напряжения на жестком теле поля  $|aa| \rightarrow 0 (\zeta \neq 0)$ :

$$\mathfrak{S}_{rr}^* = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2 + 1} \cos(2\theta), \quad \mathfrak{S}_{r\theta}^* = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2 + 1} \cos(2\theta),$$

$$\mathfrak{S}_{\theta\theta}^* = 1 - \frac{2}{\varepsilon^2} \sigma_{rr}^*,$$

При  $\zeta=0, n=1, \mathfrak{S}_{rr}^* \rightarrow -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)aa}, \mathfrak{S}_{r\theta}^* \rightarrow -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)aa}$ .

Эти результаты совпадают со статическими результатами.

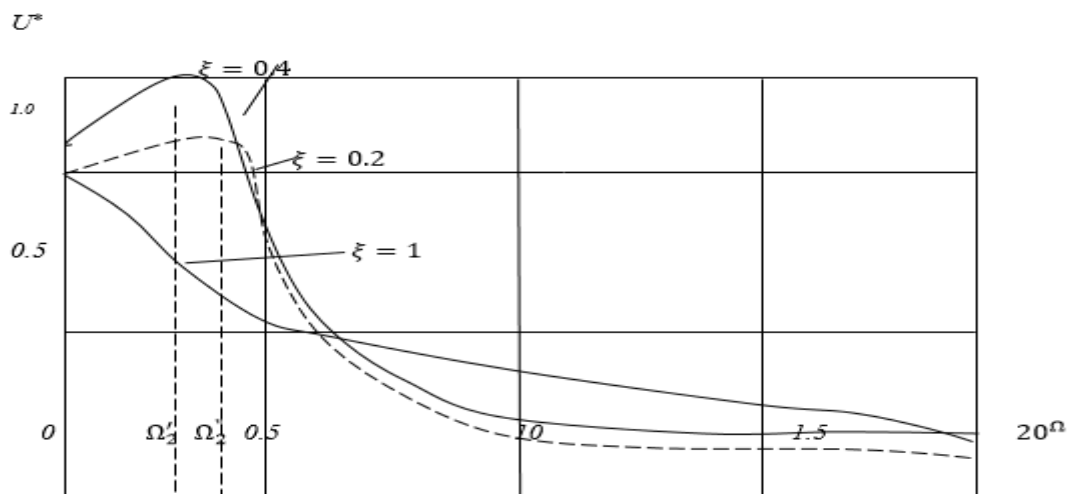


Рис.1.

Рис.2.1

Рис.1. Зависимости перемещений от частоты.

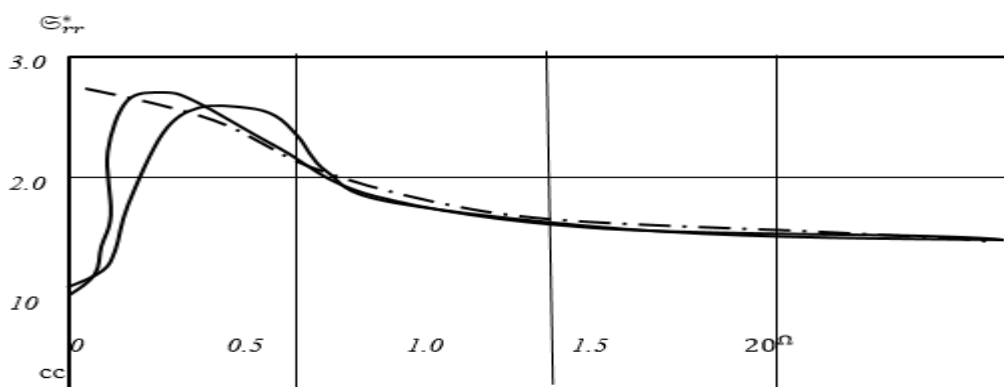


Рис.2.2

Рис.1. Зависимости напряжений от частоты

Распределение радиального нормального давления на жестком кругом цилиндре приведены на рис. 2. при  $\nu = 0.2$ ;  $\alpha\alpha = 0.1$ . Аналогично результаты получены для случае, когда окружающая среда вязкоупругая, при малой и большой вязкости. С увеличением вязкости резонансный тип умещается на 15-20%.

### Литература

1. Сафаров И.И. Оценка сеймонапряженного состояния подземных сооружений методики волновой динамики Сборник «Сейсמודинамика заданий и сооружений» Ташкент, Фан. 1988.
2. Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неодородных средах и конструкциях.-Ташкент. Фан, 1992-250 с.
3. I I Safarov, F F Homidov, B S Rakhmonov, Sh N Almuratov. Seismic vibrations of complex relief of the surface of the naryn canyon (on the Norin river in Kyrgyzstan) during large-scale underground explosions// Journal of Physics: Conference Series 1706 (2020) 012125 DOI:[10.1088/1742-6596/1706/1/012125](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1706/1/012125)
4. N U Kuldashov1, Sh N Almuratov2, D G Rayimov3, F F Homidov3, F B Jalolov. Transverse Forced Vibrations of the Plates, the Dissipative Properties of Which are Described Memory Functions// Journal of Physics: Conference Series 1921 (2021) 012062  
DOI:[10.1088/1742-6596/1921/1/012062](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1921/1/012062)
5. N U Kuldashov, A Ruzimov, M Kh Teshaeв, Sh N Almuratov, D G Rayimov. Active dynamic damping of vibrations of a mechanical system with a finite number of degrees of freedom// Journal of Physics: Conference Series 1706 (2020) 012040 DOI:[10.1088/1742-6596/1706/1/012040](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1706/1/012040)

6. Nuriddin Esanov, Jonibek Saipnazarov, Shavkat Almuratov, Go'zal Raxmonova, Matlab Ishmamatov. Free Vibrations of a Spherical Shell With a Pinched Edge// *AIP Conf. Proc.* 3268, 030008 (202) <https://doi.org/10.1063/5.0258149>
7. B.S. Rahmonov, I.M. Karimov, M.A. Narzulloev, R.A. Sobirova, Sh.N. Almuratov. Action of Moving Load on a Ribbed Cylindrical Shell with Viscoelastic Filler// *AIP Conf. Proc.* 3045, 030099 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0198819>
8. Г. Г. Юнусов, Н. К. Есанов, Ш. Н. Алмуратов, Ш. Аблокулов, Р.Собирова. О численном моделировании колебаний в радиоэлектронных конструкциях// *AIP Conf. Proc.* 2467, 060038 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0094082>
9. Сафаров И.И., Тешаев М.Х.Эсанов Н.Қ., Ҳамроева З.Қ. “Математическое моделирование собственных и вынужденных колебаний криволинейных труб, взаимодействующих со средой. Тошкент, ФАН, 2009.- 161б.
10. Сафаров И.И. Авлиякулов Н.Н. Методы повышения сейсмостойкости подземных пластмассовых трубопроводов // *Узбекский журнал нефти и газа*, 2005, №4.С.42–44.
11. Eshqorayev Q.A., Toshboyeva N.Y., Kompleks sonlarni kasbiy faoliyatda qo'llanilishi. *МУҒАЛЛИМ ҲАМ ЎЗЛИКСИЗ БИЛИМЛЕНДИРИЎ* [2025-2-2] san
12. Toshboyeva N., Tursunova N. “AMALIY DASTURLAR PAKETI YORDAMIDA TALABALARINING KASBIY KOMPETENTLIKNI RIVOJLANTIRISH” NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI.ILMIY AXBOROTNOMASI, [2024-11], ISSN:2181-1458, 39-41