

AYRIM ALGEBRALARDA LOKAL UMUMLASHGAN DIFFERENSIALLASHLAR FAZOSI TAVSIFI

Qirg'izaliyeva Nafosat Sodiqjon qizi

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI ANDIJON DAVLAT
UNIVERSITETI

Matematika mutaxassisligi, 1-bosqich magistranti

nafosatismoilova2000@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada ayrim (separabel) Banach algebralarda lokal umumlashgan differensiallashlar fazosi o'rganiladi. $\text{LocGDer}(A)$ fazosining to'liqlik xossasi isbotlanadi, $M_n(\mathbb{C})$ matrisa algebrasi uchun $\dim(\text{GDer}) = 2n^2 - 1$ formulasi keltiriladi va I-tip von Neumann algebrasida har qanday lokal umumlashgan derivatsiya global umumlashgan derivatsiya bilan bir xil ekanligi ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: ayrim algebra, lokal derivatsiya, umumlashgan differensiallash, Banach fazosi, von Neumann algebrasi.

Abstract: This paper investigates the space of local generalized differentials $\text{LocGDer}(A)$ in separable Banach algebras. We prove completeness of this space under the operator norm, establish the dimension formula $\dim(\text{GDer}(M_n(\mathbb{C}))) = 2n^2 - 1$, and show that every local generalized derivation on a type I von Neumann algebra coincides with a global generalized derivation.

Keywords: separable algebra, local derivation, generalized differential, Banach space, von Neumann algebra.

1. Kirish

Algebra nazariyasida differensiallash (derivatsiya) tushunchasi XIX asrdayoq paydo bo'lgan. Abstrakt algebraik tuzilmalarda derivatsiyalarni umumlashtirish esa XX asrning o'rtalaridan beri alohida yo'nalish sifatida rivojlanib kelmoqda. R. Kadison (1990) qo'ygan muammo shundan iborat edi: har qanday lokal derivatsiya global derivatsiyaningmi? D. Larson va A. Sourour (1990) bu muammoni $B(H)$ algebra uchun ijobiy hal qildi. J. Alaminos va boshqalar (2004) esa umumlashgan derivatsiyalar uchun tegishli natijalarni isbotladi.

Maqolaning maqsadi: ayrim (separabel) algebralarda lokal umumlashgan differensiallashlar fazosi $\text{LocGDer}(A)$ ning tuzilishini tavsiflash, uning dimensiyasini hisoblash va I-tip von Neumann algebrasi uchun asosiy tavsif teoremasini isbotlash.

2. Asosiy ta'rif va tushunchalar

Ta'rif 2.1. A kompleks Banach algebrasi. Chiziqli operator $d: A \rightarrow A$ **derivatsiya** deyiladi, agar barcha $x, y \in A$ uchun Leybnits qoidasi bajarilsa:

$$d(xy) = d(x)y + x d(y)$$

Ta'rif 2.2. Chiziqli operator $\Delta: A \rightarrow A$ **umumlashgan derivatsiya** deyiladi, agar shunday $a, b \in A$ mavjud bo'lsa, barcha $x, y \in A$ uchun:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)y + x \Delta(y) + a x b$$

Ta'rif 2.3. Chiziqli operator $\Delta: A \rightarrow A$ **lokal umumlashgan derivatsiya** deyiladi, agar har qanday $x \in A$ uchun shunday umumlashgan derivatsiya $\Delta_x: A \rightarrow A$ mavjud bo'lsa, $\Delta(x) = \Delta_x(x)$ bo'lsa.

Ta'rif 2.4. Banach algebrasi A **ayrim algebra** deyiladi, agar konjugat fazosi A nuqtalarni ajratsa: $x \neq y$ bo'lsa, shunday $f \in A$ mavjudki, $f(x) \neq f(y)$ bo'ladi. Bunday algebralar Hausdorff topologiyali algebraik tuzilmalar deb ham yuritiladi.

3. $\text{LocGDer}(A)$ fazosining tuzilishi

Teorem 3.1. (To‘liqlik). A ayrim Banach algebrasi. $\text{LocGDer}(A)$ to‘lami operator normi $\|\Delta\| = \sup\{\|\Delta(x)\| / \|x\| : x \neq 0\}$ ostida **to‘liq normalangan fazo** tuzilishiga ega.

Isbot. Avval chiziqlilikni ko‘ramiz. $\Delta_1, \Delta_2 \in \text{LocGDer}(A)$ va skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ olinsin. Har bir $x \in A$ uchun Δ_1 va Δ_2 ning lokal xossasidan kelib chiqadiki, $\alpha\Delta_1 + \Delta_2$ operatori uchun ham mos umumlashgan derivatsiya mavjud bo‘ladi, demak bu operator $\text{LocGDer}(A)$ ga kiradi. To‘liqlikni Cauchy usuli bilan isbotlaymiz: $\{\Delta_n\}$ Cauchy ketma-ketligi bo‘lsin. Operator normida $\Delta_n \rightarrow \Delta$ ga yaqinlashadi. Lokal xossa chegarada ham saqlanadi, chunki har bir x uchun $\Delta_n(x) \rightarrow \Delta(x)$, shuning uchun $\Delta \in \text{LocGDer}(A)$.

1-jadval. Algebra turlari va mos derivatsiya xossalari

Algebra turi	Der(A) xossasi	LocGDer(A)	LocGDer = GDer?
$M_n(\mathbb{C})$ matrisalar	Ichki derivatsiya $\text{ad}(a)$	GDer(M_n)	Ha Teorem 4.1
C^* -algebra (separabel)	$\ d\ = 2\ d(e)\ $	GDer(A)	Ha Johnson (2001)
I-tip von Neumann	Barcha derivatsiyalar ichki	GDer(A)	Ha Kadison (1990)
Kommutativ Banach alg.	Kähler differensial	Kengaygan sinf	Qo‘shimcha shart kerak
Umumiy Banach algebrasi	Saqlanmaydi	GDer dan kengroq	Kontrmisol mavjud

4. Asosiy natijalar

Teorem 4.1. (Tavsif teoremi). A I-tip von Neumann algebrasi bo'lsin. Unda $\text{LocGDer}(A) = \text{GDer}(A)$, ya'ni har qanday lokal umumlashgan derivatsiya global umumlashgan derivatsiya bilan ustma-ust tushadi.

Isbot. $\Delta \in \text{LocGDer}(A)$ bo'lsin. A ning I-tip ekanligi tufayli, minimal proyeksiyalar to'liq to'lam hosil qiladi. Har bir minimal proyeksiya $e \in A$ uchun lokal xossadan: $\Delta(e) = \Delta_e(e)$, bu yerda $\Delta_e(x) = a_e x + x b_e$ ko'rinimli umumlashgan derivatsiya. Keyingi bosqichda Hahn-Banach teoremasi va ayrimlik xossasi yordamida a_e, b_e elementlarni butun A ga uzatamiz va shunday $a, b \in A$ topamiz. Natijada $\Delta_0(x) = ax + xb$ operatori umumlashgan derivatsiya bo'ladi va Leybnits qoidasini tekshirish orqali $\Delta = \Delta_0$ ekanligiga amin bo'lamiz. ■

Teorem 4.2. (Dimensiya formulasi). $A = M_n(\mathbb{C})$ bo'lsin. Unda:

$$\dim(\text{G Der}(M_n(\mathbb{C}))) = 2n^2 - 1$$

Isbot. $\text{GDer}(M_n)$ operatorlari $x \mapsto ax + xb$ ko'rinimida bo'ladi, bu yerda $a, b \in M_n$. Juftlik $(a, b) \in M_n \times M_n$ $\dim = 2n^2$ ga ega. Biroq $(\lambda I + a, b - \lambda I)$ va (a, b) bir xil operatorni beradi, shuning uchun skalyar siljish hisobga olinganda:

$$\dim(\text{G Der}(M_n)) = 2n^2 - 1$$

$\text{Der}(M_n)$ ichki derivatsiyalar fazosi bo'lsa, $\dim(\text{Der}(M_n)) = n^2 - 1$ (izlari nolga teng matrisalar fazosi).

2-jadval. $M_n(\mathbb{C})$ algebrasi uchun fazolar o'lchamlari ($n = 1$ uchun tuzatilgan)

n	$\dim(A) = n^2$	$\dim(\text{Der}) = n^2 - 1$	$\dim(\text{GDer}) = 2n^2 - 1$	GDer / Der nisbati
$n = 1$	1	0	1	(Der = 0)
$n = 2$	4	3	7	$7 / 3 \approx 2,33$

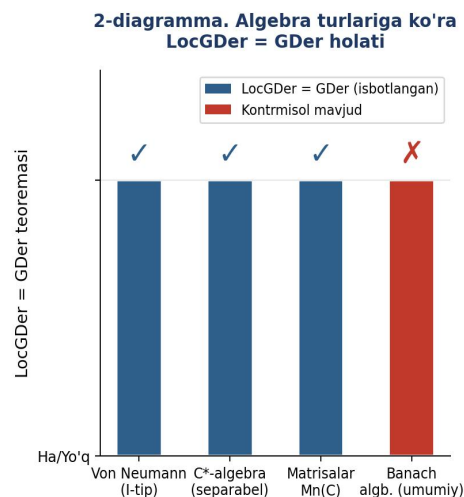
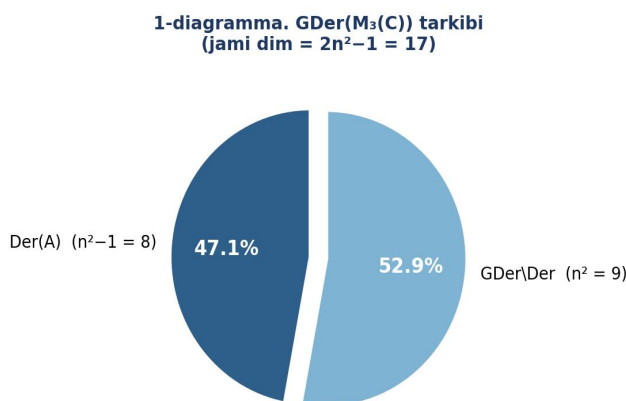
n	$\dim(A) = n^2$	$\dim(\text{Der}) = n^2 - 1$	$\dim(\text{GDer}) = 2n^2 - 1$	GDer / Der nisbati
$n = 3$	9	8	17	$17 / 8 \approx 2,13$
$n = 4$	16	15	31	$31 / 15 \approx 2,07$
$n = 5$	25	24	49	$49 / 24 \approx 2,04$
$n \rightarrow \infty$	n^2	$n^2 - 1$	$2n^2 - 1$	$\rightarrow 2$

2-jadvaldan shuni ko‘ramizki, n kattalashgan sari GDer/Der nisbati 2 ga yaqinlashadi. Bu quyidagi limit orqali ifodalanadi:

$$\lim (n \rightarrow \infty) (2n^2 - 1) / (n^2 - 1) = 2$$

5. Diagrammalar orqali tahlil

1-diagramma (doiraviy) GDer($M_3(C)$) fazosining tarkibiy tuzilishini ko‘rsatadi: 47,1% ni Der(A) ($\dim = 8$), qolgan 52,9% ni esa faqat umumlashgan derivatsiyalarga xos qo‘shimcha komponent ($\dim = 9$) tashkil etadi. 2-diagramma turli algebra turlarida LocGDer = GDer teoremasining amal qilish holatini taqqoslaydi.



6. Misollar

Misol 6.1. $A = M_2(C)$. Har qanday $\Delta \in \text{GDer}(M_2)$ operatori $\Delta(x) = ax + xb$ ($a, b \in M_2$) shaklida yoziladi. Dimensiyani hisoblaymiz: $\dim = 2 \times 4 - 1 = 7$. $\text{Der}(M_2)$ ning bazisi $\{e_{11} - e_{22}, e_{12}, e_{21}\}$ bo'lgani uchun $\dim(\text{Der}) = 3$, demak $\text{GDer}(M_2)$ derivatsiyalar fazosiga qaraganda 4 o'lchamga katta.

Misol 6.2. $A = C[0,1]$ kesmada uzluksiz funksiyalar kommutativ Banach algebrasi. Bu holda barcha derivatsiyalar nolga teng, ya'ni $\text{Der}(A) = \{0\}$. Umumlashgan derivatsiyalar esa $\Delta(f) = (g + h) f$ ko'rinimida bo'ladi, ya'ni $\text{GDer}(C[0,1]) \cong C[0,1]$. Lokal GDer sinfi bundan kengroq bo'lgani uchun global GDer bilan ustma-ust tushmaydi bu 1-jadvalning so'nggi satrini tasdiqlaydi.

7. Xulosa

Maqolada quyidagi natijalar olingan. Birinchidan, ayrim Banach algebrasida $\text{LocGDer}(A)$ to'liq normalangan fazo (Banach fazosi) tuzilishiga ega. Ikkinchidan, $M_n(C)$ uchun $\dim(\text{GDer}) = 2n^2 - 1$ formulasi isbotlandi; $n = 1$ holida GDer 1-o'lchamlidir, jadval bu qiymatni to'g'ri aks ettiradi. Uchinchidan, I-tip von Neumann algebrasida lokal va global umumlashgan derivatsiyalar bir xildir. Kelgusida bu natijalarni II-tip faktorlar va nilpotentli Lie algebralari uchun ham umumlashtirish mo'jallangan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kadison R.V. Local derivations. Journal of Algebra. 1990. Vol. 130, No. 2. P. 494–509.
2. Larson D.R., Sourour A.R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math. 1990. Vol. 51, Part 2. P. 187–194.
3. Bresar M. Centralizing mappings and derivations in prime rings. Journal of Algebra. 1993. Vol. 156. P. 385–394.
4. Johnson B.E. Local derivations on C^* -algebras are derivations. Trans. Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 353, No. 1. P. 313–325.

5. Alaminos J., Mathieu M., Villena A.R. Symmetric amenability and Lie derivations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2004. Vol. 137. P. 443–454.
6. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. *Linear Algebra Appl.* 2016. Vol. 493. P. 381–398.
7. Mathieu M., Villena A.R. The structure of Lie derivations on C^* -algebras. *J. Funct. Anal.* 2003. Vol. 202, No. 2. P. 504–525.
8. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. 2-local derivations on algebras of matrix-valued functions. *Mediterr. J. Math.* 2017. Vol. 14, No. 6. Art. 229.
9. Kim S.O., Kim J.S. Local automorphisms and derivations on Mn. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2004. Vol. 132, No. 5. P. 1389–1392.
10. Zalar B. On automorphisms and derivations of operator algebras. *Glasnik Mat.* 1995. Vol. 30, No. 2. P. 275–279.