

BIR O'LCHAMLI CHEGARAVIY TESKARI MASALALARNING QO'YILISHI

Norqulov Furqat Maxmatmo'aminovich.

Termiz davlat pedagogika instituti tyutori

El.pochta: fnorqulov@2020gmail.com

Tel: 93-610-40-30

Annotatsiya. Chekli-ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli, qo'shma gradientlar usuli, matritsalar nazariyasi, approksimatsiyalash va optimallashtirish, differensial tenglamalarni sonli yechish usullaridan foydalanilgan.

Kalit so'zlar. Teskari masala, koeffitsientli teskari masala, chegaraviy teskari masala, differensial tenglama, qo'shma gradient usuli, ayirmali sxema, approksimatsiya, umumlashgan yechim, algoritim, dastur.

KIRISH

Teskari masala, odatda, masalaning noma'lum parametrlarini - sabab omillarini ularni yuzaga keltirgan bir qator kuzatishlar natijasida olingan ma'lumotlarga asoslanib aniqlash jarayoni deb hisoblanadi. Odatda, to'g'ri masala natijalarni topish uchun sabablarni so'raydi. Teskari masalada, aksincha, oqibatlar ma'lum, lekin sabablari noma'lum. Ular fizika va muhandislik fanlaridagi eng muhim matematik masalalardan biriga aylandi, chunki ular bevosita o'lchay olmaydigan parametrlarni aniqlash imkonini beradi. Teskari masala keng ko'lamli muhim qo'llanish doirasiga ega bo'lib, nazariyasi yaqqol yangilik va murakkablikka ega bo'lib, ko'plab olimlarning e'tiborini tortdi. Teskari masalalar fanlararo fanga, hisoblash va amaliy matematika sohasidagi mashhur tadqiqot sohasiga aylandi.

Teskari masalalari hayotimizdagi ko'plab sohalarda uchraydi. Ushbu masalalar matematik hisob-kitoblar orqali yechiladi. Bunga doir matematik-fizika fani mavjud bo'lib, undagi masalalarni approksimatsiyalash orqali ayirmali sxemalar ko'rinishiga keltirib, sonli (taqribiy) hisob-kitoblarni amalga oshirish mumkin. Asosan sonli (taqribiy) yechishlar ko'pincha juda murakkab funksiyalarni hisoblashda qo'llaniladi. Masalan, neft va gazlar dinamikasi kabi teskari masalalarni sonli yechish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ishlab chiqilgan algoritm va dasturlardan termofizikaning teskari masalalarini yechishda, filtrlash nazariyasi va ifloslantiruvchi moddalarning uzluksiz muhitlarda tarqalishida foydalanish imkoniyatlari bilan belgilanadi.

1. Chegaraviy teskari masalaning qo'yilishi va hisoblash algoritmi

$\Omega=[0,l]$ soha berilgan bo'lsin. Parabolik tenglama uchun quyidagi teskari davom etish masalasi yechimi qaralsin, unga chegaraviy teskari masala ham kiradi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x,t)u = f(x,t), \quad t \in (0,T], \quad (1)$$

bunda $0 < k_1 \leq k(x,t) \leq k_2$, boshlang'ich shart quyidagicha berilgan

$$u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

Chap chegaraga Neyman chegara sharti va qo'shimcha shart qo'yilgan bo'lsin

$$\begin{aligned} -k(0,t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \mu(t), \quad t \in (0,T] \\ u(x^*,t) &= \psi(t), \quad t \in (0,T], \end{aligned} \quad (3)$$

bunda $c(x,t) \geq 0$, $u^0(x)$, $\mu(t)$, $\psi(t)$, $f(x,t)$ – analitik funksiyalar ma'lum, o'ng chegaradagi $x=l$ nuqtadagi yechim $u(x,t)$ noma'lum, ya'ni u aniqlanishi kerak va ixtiyoriy $x^* \in [0, l)$ nuqtadagi yechim berilgan. Ta'kidlash kerakki, $x^*=0$ uchun chegaraviy teskari masala qaraladi. Teskari davomli (1) masalada parabolik tenglamaning $u(x,t)$, $x \in (0,l]$ yechimini, berilgan (2) boshlang'ich shartni, (3) chegaraviy va qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish kerak.

Yuqoridagi teskari davom etish masalasini sonli yechish uchun $\bar{\omega}_\tau$ vaqt va fazoviy o'zgaruvchi bo'yicha teng oraliqli to'rlarni quramiz:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\tau &= \{t^n | t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\}, \\ \partial\omega_h &= \{x_i | x_i = ih, \quad i = 0, M\}, \\ \omega_h &= \{x_i | x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad h = l/M\}, \end{aligned}$$

x^* kuzatish nuqtasi ω_h fazoviy to'rning m bo'lgan tuguniga tushadi deb faraz qilaylik, ya'ni $x^* = x_m = mh \in \omega_h$.

(1) parabolik tenglamaning vaqt bo'yicha approksimatsiyasi va $u_i^n = u(x_i, t^n)$ belgilashni kiritib, quyidagi ayirmali sxemaga kelinadi

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left(k_{i+0.5}^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - k_{i-0.5}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) + r_i^n u_i^n = f_i^n, \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, M - 1$$

bunda $k_{i\pm 0.5}^n = k(x_i \pm 0.5h, t^n)$. Ayirmali tenglama (4) kabi qo'yilgan masalani yechish uchun bir xil yaqinlashish tartibiga ega bo'lgan Neyman chegaraviy shartining chap chegaradagi diskret analogi quyidagi shaklga ega

$$\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\tau} - \frac{2}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \mu^n \right) + r_0^n u_0^n = f_0^n \quad (5)$$

Har bir vaqt qatlamida hisob-kitoblarni tashkil qilish qulayligi uchun tenglamalar sistemasini (4) - (5) hisoblanuvchi shaklga keltiramiz:

$$a_i u_{i-1}^n - c_i u_i^n + b_i u_{i+1}^n + d_i = 0, \quad i = 0, \dots, M - 1. \quad (6)$$

a_i, b_i, c_i, d_i koeffitsientlar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi

$$a_i = k_{i-0.5}^n, \quad b_i = k_{i+0.5}^n,$$

$$c_i = a_i + b_i + h^2 r_i^n + \frac{h^2}{\tau}, \quad d_i = h^2 f_i^n + \frac{h^2}{\tau} u_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, M - 1, \quad (7)$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = k_{0.5}^n, \quad c_0 = 2b_0 + h^2 \frac{h^2}{\tau}, \quad d_0 = h^2 f_0^n + \frac{h^2}{\tau} u_0^{n-1} + 2h\mu^n$$

$x^* = x_m$ ni hisobga olgan holda, qo'shimcha shartning diskret analogi (3) tenglamalarning ikkinchisi quyidagi shaklga ega

$$u(x^*, t^n) = u_m^n = \psi(t^n). \quad (8)$$

Hisoblanuvchi (6), (8) ko'rinishda yozilgan tenglamalar sistemasini va yechimning o'ng chegaradagi $x=l$ qiymatini optimal yechish uchun kerakli to'r funksiyasining ikkita yordamchi to'r y_i^n va v_i^n superpozitsiyasining quyidagi ko'rinishidan foydalaniladi

$$u_i^n = y_i^n + \varphi^n v_i^n, \quad i = 0, \dots, M, \quad (9)$$

bunda o'ng chegaradagi Dirixle chegara sharti $u_M^n = \varphi^n = \varphi(t^n)$ noma'lum va uni aniqlash kerak. Neyman chegaraviy sharti (5) ning diskret analogini (9) chiziqli shakl bilan taqqoslab, quyidagi tenglama hosil qilinadi

$$\frac{y_0^n - u_0^{n-1}}{\tau} - \frac{2}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{y_1^n - y_0^n}{h} + \mu^n \right) + r_0^n y_0^n = f_0^n$$

$$\frac{v_0^n}{\tau} - \frac{2}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{v_1^n - v_0^n}{h} \right) + r_0^n v_0^n = 0. \quad (10)$$

O'ng chegara, shuningdek, o'ng chegaradagi Dirixle chegara shartining $u_M^n = \varphi^n$ diskret analogini (5) chiziqli ko'rinish (9) bilan solishtirilsa, $y_M^n = 0, v_M^n = 1$ ga ega bo'linadi.

Shunday qilib, har bir vaqt qatlamida $y_i^n, v_i^n, i = 0, \dots, M$ to'rt funksiyalarini aniqlash uchun tridiagonal matritsalar bilan ikkita chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish kerak:

$$a_i y_{i-1}^n - c_i y_i^n + b_i y_{i+1}^n + d_i = 0, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad y_M^n = 0, \quad (11)$$

$$a_i v_{i-1}^n - c_i v_i^n + b_i v_{i+1}^n = 0, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad v_M^n = 1, \quad (12)$$

bunda a_i, b_i, c_i, d_i (7) formulalar bilan aniqlanadi.

y_i^n, v_i^n yechimlarni topish uchun (11) - (12) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi Progonka usuli bilan yechiladi. Ushbu tenglamalar sistemalarining yechimi y_i^n to'rt funksiyasi uchun takroriy formulalar ko'rinishida izlanadi:

$$y_M^n = 0, \quad y_i^n = \alpha_i y_{i+1}^n + \beta_i, \quad i = M-1, M-2, \dots, 0 \quad (13)$$

va v_i^n to'rt funksiyasi uchun:

$$v_M^n = 1, \quad v_i^n = \alpha_i v_{i+1}^n, \quad i = M-1, M-2, \dots, 0. \quad (14)$$

Progonka metodi koeffitsientlari quyidagi rekurrent formulalar yordamida hisoblanadi

$$\alpha_0 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (15)$$

$$\beta_0 = \frac{d_0}{c_0}, \quad \beta_{i+1} = \frac{d_i + a_i \alpha_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, M-1.$$

$x_m = x^*$ fazoviy to'rt tugunidagi (9) munosabatni hisobga olgan holda (8) qo'shimcha shartning diskret analogidan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz

$$\psi^n = y_m^n + \varphi^n v_m^n, \quad (16)$$

φ^n yechim quyidagi formula yordamida aniqlanadi

$$\varphi^n = (\psi^n - y_m^n) / v_m^n. \quad (17)$$

Agar $v_m^n \neq 0$ shart bajarilsa, tenglamaning φ^n yechimi chekli hisoblanadi. Buni tuzilgan hisoblash algoritmini kompyuterda sonli hisoblash jarayonida har bir vaqt qatlamida manfiy bo'lmagan, monoton ravishda ortib borayotgan $v_i^n, i = 0, \dots, M$ funksiyaning grafigini ko'rsatish orqali tekshirish mumkin.

2. Chegaraviy teskari masala uchun hisoblash eksperimenti natijalari va ularning tahlili

Quyidagi ma'lum shartlarga ega bo'lgan $[0, l]$ hisoblash intervalida chegaraviy teskari masala qaraladi

$$u^0(x)=0, k(x,t)=1, \quad r(x,t)=0, \quad f(x,t)=0, \quad \mu(t)=0.$$

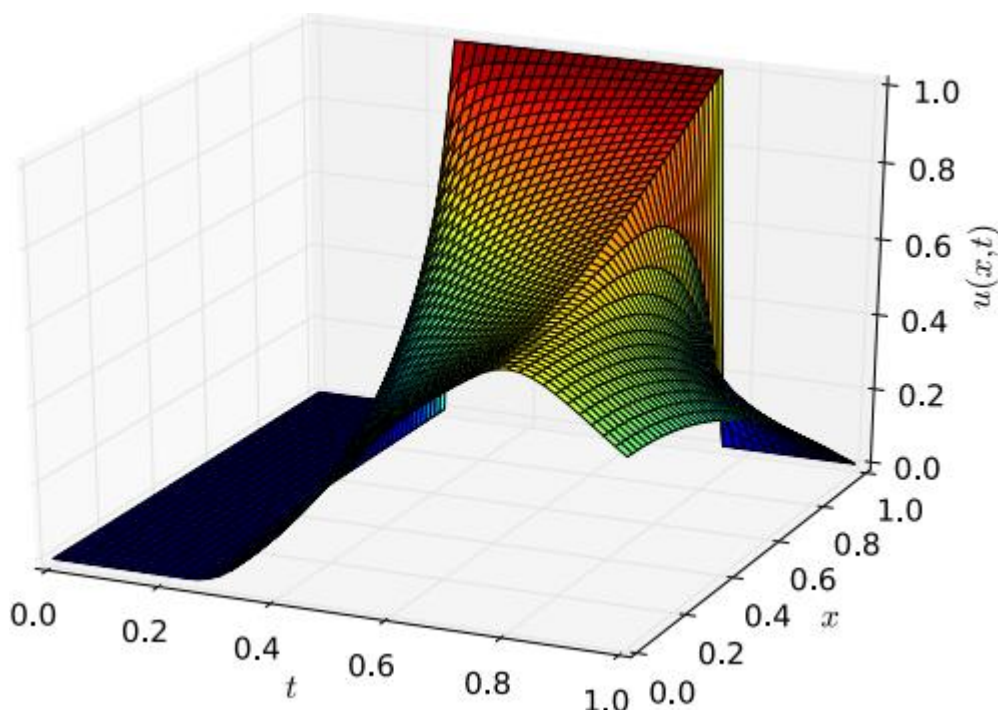
O'ng chegaradagi yechim quyidagi ko'rinishda olinadi

$$u(l, t) = \begin{cases} 1 & 0.25T \leq t \leq 0.75T, \\ 0 & \text{aks holda} \end{cases}$$

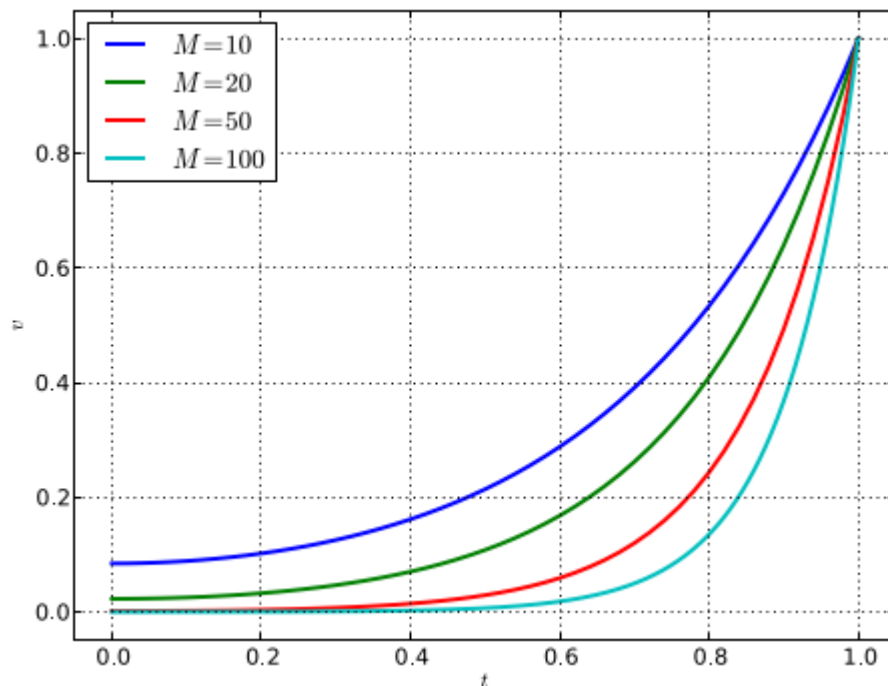
3-jadval: t Vaqt qadamlari har xil bo'lgan ikkita xatolik.

$N \setminus \zeta$	$M=50$		$M=100$		$M=200$	
	$x^* = 0$	$x^* = l/2$	$x^* = 0$	$x^* = l/2$	$x^* = 0$	$x^* = l/2$
MAX ϵ	1.42×10^{-3}	7.12×10^{-4}	99×10^{-3}	2.01×10^{-3}	1.12×10^{-2}	5.63×10^{-3}
RMSE	08×10^{-4}	1.59×10^{-4}	6.05×10^{-3}	18×10^{-4}	1.26×10^{-3}	6.34×10^{-4}

Davom etish masalasi misolida bo'lgani kabi, avvalo berilgan shartlar bilan $u(l, t)$ to'g'ri masalani yechib qo'shimcha $u(x^*, t)$ sharti olinadi. E'tibor bering, chegaraviy teskari masalada $x^*=0$, davom etish masalasi esa $x^* \in (0, l)$ intervalda qaraladi. $u(x, t)$ yechimning $l=T=1$ va $M=N=500$ qiymatlardagi fazo-vaqt grafigi 6-rasmda keltirilgan. Yordamchi funksiya $v(x)$ ning turli vaqt qadamlarida olingan natijalar grafigi 7-rasmda keltirilgan.

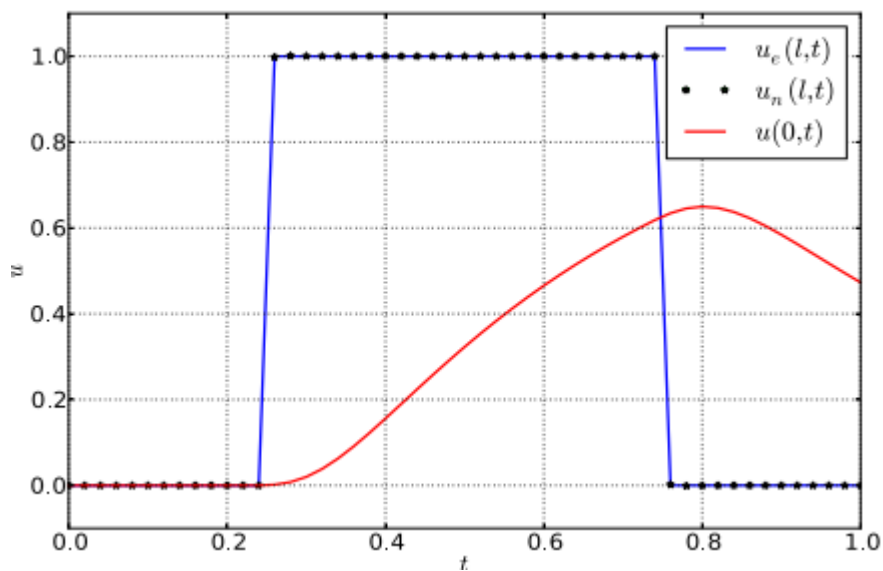


1-rasm. $u(x,t)$ yechimning fazo-vaqt grafigi.

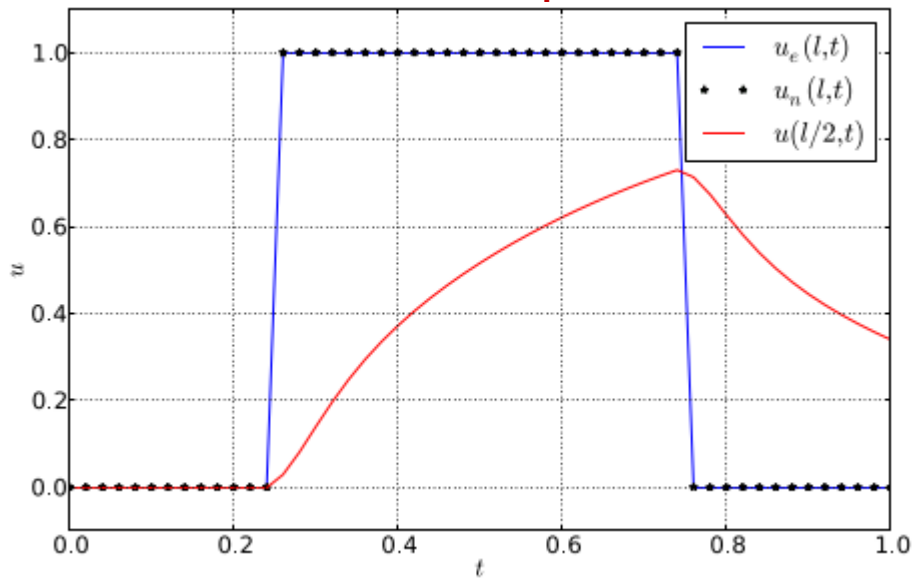


2-rasm: τ vaqtning turli qiymatlaridagi yordamchi funksiya v ning grafigi.

Grafik shuni ko'rsatadiki, τ qanchalik kichik bo'lsa, $v(x)$ ning qiymatlari tezroq x nolga intiladi, natijalar shunchalik yomon bo'ladi.



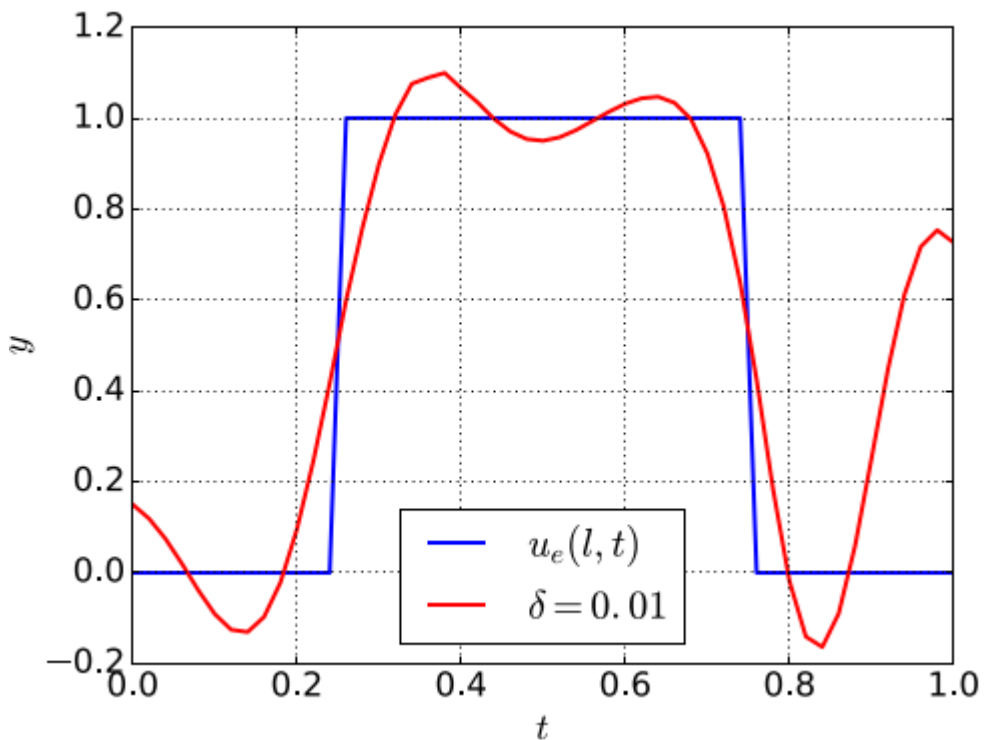
a) $x^* = 0$.



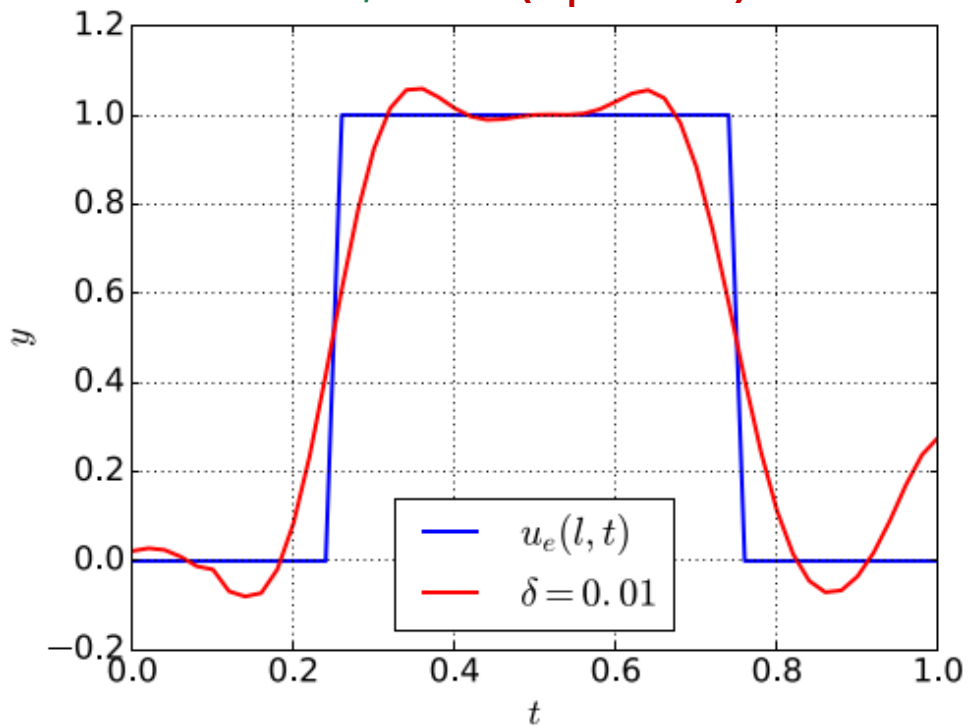
b) $x^* = l/2$.

3-rasm: Turli kuzatish nuqtalari bilan $u(l,t)$ ning sonli va aniq yechimlari.

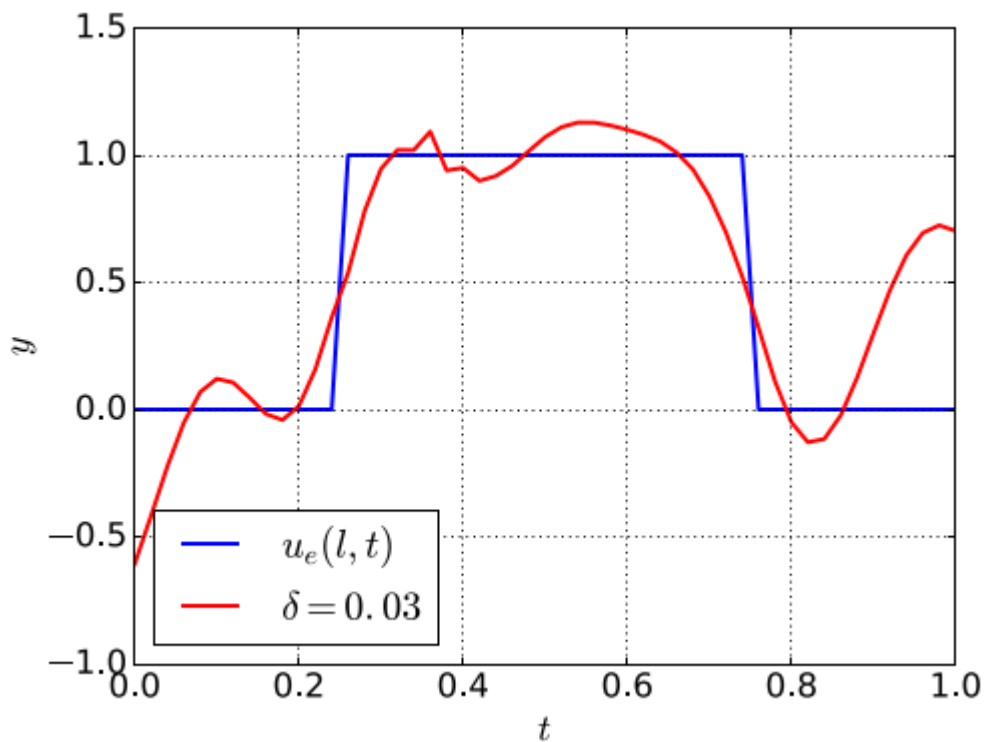
Turli kuzatuv nuqtalari uchun qayta tiklangan $u(l,t)$ chegara sharti 8-rasmda ko'rsatilgan, bu hisob-kitoblarda $M=N=50$. Va turli xil vaqt qadamlari bilan hisoblangan ikkita xatolik $\tau = T/M$ 3-jadvalda ko'rsatilgan, jadval keltirilgan hisoblash natijalari $N=100$ uchun olingan.



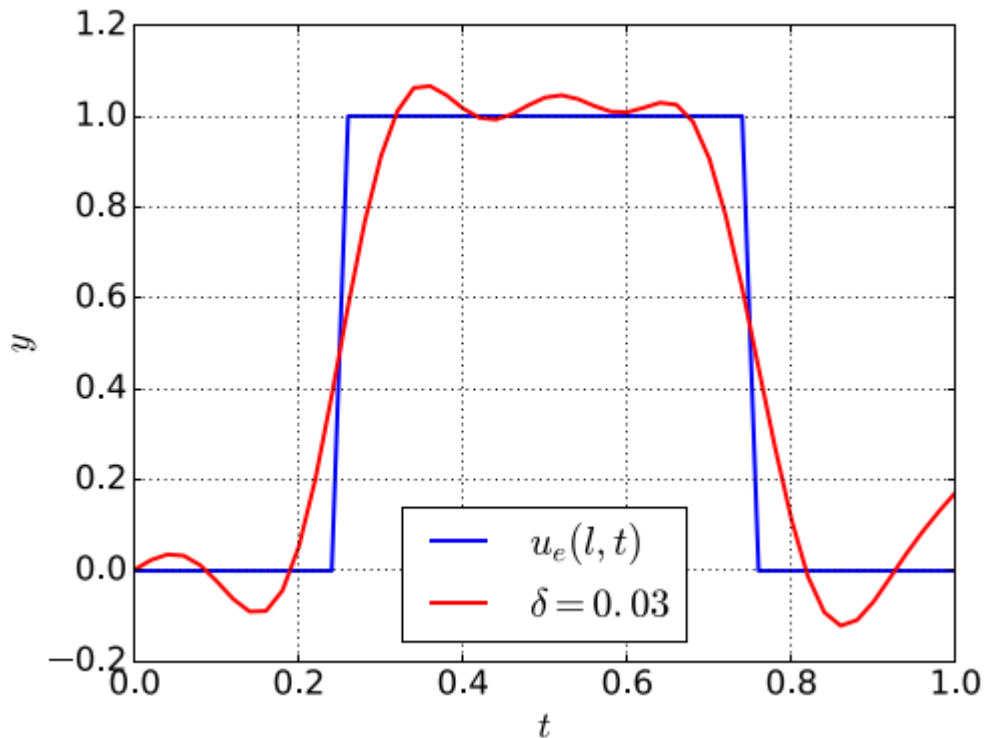
(a) $\delta = 1\%$ va $x^*=0$ da olingan yechim.



b) $\delta = 1\%$ va $x^* = l/2$ da olingan yechim.



c) $\delta = 3\%$ va $x^* = 0$ da olingan yechim.



d) $\delta = 3\%$ va $x^* = l/2$ da olingan yechim.

4-rasm: Turli δ va turli x^* bo'lgan $u(l, t)$ yechim.

Turli xil buzilish darajalariga ega bo'lgan yechim grafiklari 9-rasmda ko'rsatilgan. Natijalar $N=100$, $M=50$ uchun olingan va $x^*=0$ va $x^*=0.5$ kuzatish nuqtalari tanlangan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, kirish ma'lumotlari buzilishli bo'lsa, chegaraviy teskari masalaning natijalari davom etish masalasiga qaraganda yomonroq bo'ladi.

XULOSA

Teskari masalalarning mohiyati, ularning matematik modellarini yaratish usullari va klassifikatsiyasi o'rganildi. Nokorrekt masalalar nazariyasining asosiy tamoyillari, shuningdek, Adamar va Tixonov tomonidan ishlab chiqilgan shartlar asosida yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari tahlil qilindi.

Bir va ikki o'lchamli teskari masalalar uchun ishlab chiqilgan algoritmlar yordamida keng ko'lamli hisoblash tajribalari o'tkazildi. Olingan natijalar sonli usullarning yuqori aniqlik va barqarorlikka ega ekanligini ko'rsatdi.

Ushbu tadqiqotning ilmiy yangiligi parabolik tenglamalar uchun yangi sonli usullarni ishlab chiqish va ularni teskari masalalar nazariyasida qo'llash bilan belgilanadi. Tadqiqot natijalari matematika va hisoblash texnologiyalari sohasida muhim amaliy ahamiyatga ega.

1. Самарский Александр Андреевич, Вабищевич Петр Николаевич. Вычислительная теплопередача. — ЛИБРОКОМ, 2009.
2. Денисов А. М. Обратная задача для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 11. — С. 1756–1766.
3. Hadamard J. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin. — 1902.
4. arXiv.org