Том 1, Выпуск 3, 30 Ноября

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Фатима Алимбетова

Национальный университет Узбекистана

Алгебра и функциональный анализ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+\beta x=0,\quad t\neq t_p\ , \tag{1}$$

$$\Delta\dot{x}\big|_{t=t_p}=\Delta\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_p}=\frac{dx(t_p+0)}{dt}-\frac{dx(t_p-0)}{dt}=I_p\,, \tag{2}$$

Где, t_p , I_p □ 0 , p □ў моменты и величины импульсных воздействий соответственно. Относительно моментов импульсного воздействия t_p, p□ў предполагаем, что t_m □ t_n при m □ n и t_k □ □□ при k □ □□□

Важность изучения дифференциальных уравнений (1) с уловиями импульсных воздействий (2) заключается в том, что такие уравнения возникает при построении решения слабонелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с помощью методов теорий возмущении [1]. В данной работе рассмотрена задача существования решениний уравнения (1), удовлетворяющего условию импульсного воздействия (2) при начальных условиях

$$x(t_0^*)=x_0,\quad \dot{x}(t_0^*)=\dot{x}_0 \tag{3}$$

где $t_0^*\neq t_p,\ \forall p\in$ ў , $t_0\le t_0^*<t_1,$ и описанию условия при выполнений которых полученные решения становится перодической с некоторым периодом Т.

Решением задачи (1 – 3) понимается функция, удовлетворяющее уравнению (1) при $t\in$ Ў$/\{t_p, p\in$ ў$\}$, условию импульсного воздействие (2) при $t\in\{t_p, p\in$ ў$\}$ и начальному условию (3) т.е. функций дважды непрерывно дифференцируемые при $t\in\bigcup_{p=-\infty}^{+\infty}(t_{p-1},t_p)$

с кусочно-непрерывной производной. Решение задачи (1) - (3) существует, является единственным и определено для всех t Ў . Известно, что решение уравнение □ □ 1 зависит от

двух произвольных параметров, причем в качество этих параметров может быть приняты x_0 и $\dot{x}_0$.

$$x(t)=\begin{cases} x_0(t)+\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum\limits_{t_0^*<t_p\le t} I_p\left[e^{\lambda_1(t-t_p)}-e^{\lambda_2(t-t_p)}\right], & t\ge t_0^* \\ x_0(t)-\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum\limits_{t\le t_p<t_0^*} I_p\left[e^{\lambda_1(t-t_p)}-e^{\lambda_2(t-t_p)}\right], & t\le t_0^* \end{cases}$$

Лемма. Пусть задача (1), (2) имеет Т-периодическое решение x (t) □ L . Тогда существует натуральное число m такое, что для всех p □ў выполняются условия периодичности

$$I_{p+m}=I_p, \qquad t_{p+m}=t_p+T.$$

Доказательство. Покажем вначале, что если $t_{p_0}\in J$, p_0-некоторое целое число $\left(I_{p_0}\neq 0\right)$, то существует $p_1\in$ ў такое, что $t_{p_1}\in J$, и $t_{p_1}=t_{p_0}+T$.

Предположим противное. Если $t_{p_0}+T\in J$, то функция $\dot{x}(t)$ ябляется непрерывной в точке $t=t_{p_0}+T$, в то время как $\dot{x}(t)$ имеет разрыв первого рода при $t=t_{p_0}$ причем в силу (1) и (2) выполняется соотношение $\dot{x}(t_{p_0}+0)-\dot{x}(t_{p_0}-0)=I_p\neq 0$, что с учетом предположения о периодичности

Решения x= (T) приводит к противоречию.

Таким образом, если $t_{p_0} \in J$, то существует $t_{p_1} \in J$ такое, что $t_{p_1} = t_{p_0} + T$. Обозначим $p_1 - p_0 = m \geq 1$. Тогда в силу произвольности точки t_{p_0} равенства $t_{p+m} = t_p + T$ выполняются для всех $p \in ў$.

Рассмотрим теперь значение функции $\dot{x}(t)$ при $t = t_{p_0}$ и $t = t_{p_0} + T$, где $p_0 \in ў$ -произвольное число. В силу периодичности функции $x^*(t)$ справедливы равенства

$$\dot{x}(t) \equiv \dot{x}(t+T),\ t \in \left(t_{p_{0-1}}, t_{p_{0+1}}\right) / \left\{t_{p_0}\right\},$$

$$\dot{x}\left(t_{p_0} - 0\right) = \dot{x}\left(t_{p_0} + T - 0\right),\ \dot{x}\left(t_{p_0} + 0\right) = \dot{x}\left(t_{p_0} + T + 0\right).$$

Тогда из условия импульсного воздействия (2), находим

$$I_{p_0} = \dot{x}\left(t_{p_0} + 0\right) - \dot{x}\left(t_{p_0} - 0\right) = \dot{x}\left(t_{p_0} + T + 0\right) - \dot{x}\left(t_{p_0} + T - 0\right) = I_{p_0+m}$$

Учитывая, что p_0 -произвольное, отсюда получаем $Ip0+$ м $= I_p$ для всех $p \in ў$.

Лемма доказана

Пусть T-произвольное действительное число, для которого существует натуральное число m такое, что для всех $p \in ў$ выполняются условия (5). Выясним, при каких дополнительных условиях на характеристические числа λ_1, λ_2 уравнения (1), начальные данные $x_0, \dot{x}_0$, величины $I_1, I_2, \ldots I_m$, $t_1, t_2, \ldots t_m$ и значения t_0^*, T возможно выполнение тождества $x(t) = x(t+T)$, где $x(t)$- решение задачи (1)-(3), $t \in Ў^1$, т.е. получим условия, при которых решение $x(t)$, записанное с помощью формул вида (4) является периодическим с периодом T.

Имеет место теорема.

Теорема. Предположим, что характеристические числа λ_1, λ_2 уравнения (1) действительные и удовлетворяют условию $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ и имеет место условие периодичности (5). Тогда существует периодическое с периодом T решение задачи (1)-(3) и это решение является единственным.

Доказательство. Пусть $t \geq t_0^*$ - произвольный момент времени, причем для определнности считаем, что $t \in [t_k, t_{k+1})$, где k - некоторое неотрицательное число, то, учитывая (4) , можем записать

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{t_0^* < t_p \leq t} I_p \left[e^{\lambda_1 (t - t_p)} - e^{\lambda_2 (t - t_p)}\right], \qquad (6)$$

откуда с учетов условий (5) имеем

$$x(t+T)=x_0(t+T)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{p=1}^{k+m}I_p\left[e^{\lambda_1(t+T-t_p)}-e^{\lambda_2(t+T-t_p)}\right]=$$

$$=x_0(t+T)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{p=1}^{k}I_p\left[e^{\lambda_1(t-t_p)}-e^{\lambda_2(t-t_p)}\right]+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{p=k+1}^{m+k}I_p\left[e^{\lambda_1(t+T-t_p)}-e^{\lambda_2(t+T-t_p)}\right]=$$

$$=x_0(t+T)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{p=1}^{m}I_p\left[e^{\lambda_1(t-t_p)}-e^{\lambda_2(t-t_p)}\right]+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{p=1}^{k}I_p\left[e^{\lambda_1(t-t_p)}-e^{\lambda_2(t-t_p)}\right] \qquad (7)$$

где

$$x_0(t)=\frac{\lambda_2 x_0-\dot{x}_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1(t-t_0^*)}-\frac{\lambda_1 x_0-\dot{x}_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2(t-t_0^*)},$$

(8)

Учитывая, что t-произвольное, из тождества $x(t)\equiv x(t+T)$ и формул $(6)-(8)$ находим:

$$\begin{cases}(\lambda_2 x_0-\dot{x}_0)(e^{\lambda_1 T}-1)=e^{\lambda_1(T-t_0^*)}\sum\limits_{p=1}^{m}I_p e^{-\lambda_1 t_p}\\(\lambda_1 x_0-\dot{x}_0)(e^{\lambda_2 T}-1)=e^{\lambda_2(T-t_0^*)}\sum\limits_{p=1}^{m}I_p e^{-\lambda_2 t_p}\end{cases}$$

(9)

$$\begin{cases}\lambda_2 x_0-\dot{x}_0=\dfrac{1}{e^{\lambda_1 T}-1}e^{\lambda_1(T-t_0^*)}\sum\limits_{p=1}^{m}I_p e^{-\lambda_1 t_p}\\\lambda_1 x_0-\dot{x}_0=\dfrac{1}{e^{\lambda_2 T}-1}e^{\lambda_2(T-t_0^*)}\sum\limits_{p=1}^{m}I_p e^{-\lambda_2 t_p}\end{cases}$$

Очевидно, что если $\lambda \neq 0$, то равенства (12), рассматриваемые как уравнения относительно величин x_0 $\dot{x}_0$, имеет единственное решение. Таким образом, для случая действительных характеристических корней уравнения (1) теорема доказана.

Список литературы

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-linear Sciences. Ser.A. V14.-Singapore: World Scientific. - 1995. -462p.

2. Samoylenko V.Hr., Yelgondyev K.K. On existense of periodikal solutions for differential equations with impulsive effects// Jorn. Facta Universitatis/ Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998, №2(2). P635-639.

Резюме. Рассмотрено линейное дифференциальное уравнения второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Для случая действиетльных характеристических корней рассматриваемого уравнения получены условия существования периодических решений.