



QAYTMA VA YUQORI DARAJALI TENGLAMALAR ABDULLAYEV HUMOYIDDIN BAXTIYOR O'G'LI

Fizika-Matematika fakulteti

Matematika ta'lim yo'nalishi 3-kurs

Ilmiy rahbar: Bozorov Jo'rabek Tog'aymurodovich

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori.

Annotatsiya: Bizga matematika kursida ma'lumki, yuqori darajali tenglamalar deganda uchinchi, to'rtinchi darajali tenglamalarni yechishni, yechimini topishni bir necha usulini ko'rganmiz. Agar tenglamamiz to'rtinchi darajadan yuqori bo'lsa, beshinchi, oltinchi va hakazo n chi darajali bo'lsa, bunday tenglamalarni yechishni aynan ushbu maqolada ko'rib chiqamiz.

Kalit so'zlar: yuqori darajali tenglama, tenglama, ratsional tenglama, qaytma tenglama.

Ta'rif. Ushbu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

ko'rinishidagi tenglamalar **yuqori darajali (butun ratsional) tenglamalar** deb ataladi, bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$.

Bizga matematika kursida malumki, yuqori darajali tenglamalar deganda uchinchi, to'rtinchi darajali tenglamalarni yechishni, yechimini topishni bir necha usulini kurganmiz. Agar tenglamamiz to'rtinchi darajadan yuqori bulsa, beshinchi, oltinchi va hakozi n chi darajali bo'lsa, bunday tenglamalarni qanday yechamiz va yechimini qanday topamiz degan savolga quyidagi tushinchani kiritamiz.

Qaytma tenglama tushunchasi.

Ta'rif. Ushbu

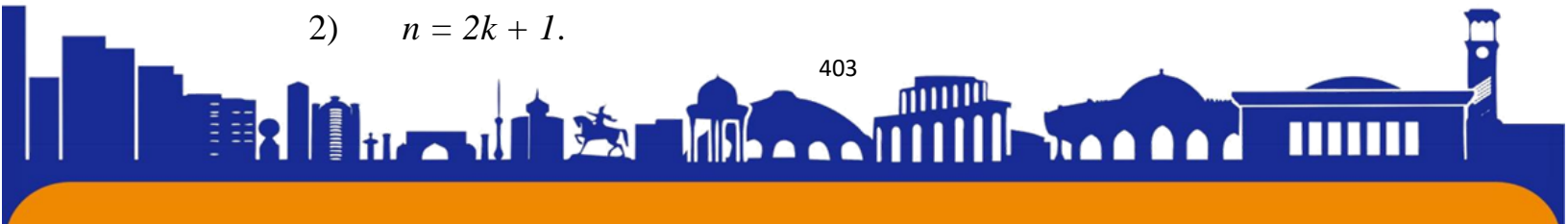
$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0 \quad (2)$$

ko'rinishidagi butun algebraik tenglama **qaytma tenglama** deyiladi.

Bunda tenglamaning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda joylashgan hadlarning koeffitsiyentlari bir biriga teng bo'ladi. Qaytma tenglamaning ildizlari hech biri nolga teng emasligini ko'rish oson.

Qaytma tenglamani yechishni ikki holatini qaraymiz,

- 1) $n = 2k$.
- 2) $n = 2k + 1$.





Oldin juft ($n = 2k$) darajali qaytma tenglamani qaraymiz. Tenglamani har ikkala qimini x^k ga bo'lib, hadlarni gurhlash natijasida uni quyidaga ko'rinishga keltiramiz.

$$a(x^k + \frac{1}{x^k}) + b(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) + \dots + \ell(x + \frac{1}{x}) + f = 0 \quad (3)$$

Agar (3) tenglamada $x + \frac{1}{x} = y$ desak, ketma – ket quyidagilarni topamiz:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \dots \quad (4)$$

(4) ni (3) ga qo'yib y ga nisbatan k darajali tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechib har bitta yechimini $x^2 - yx^2 + 1 = 0$ tenglamadagi y ga quyib, (2) tenglamaning umumiy yechimi topiladi.

Misol-1. Ushbu

$$21x^6 + 82x^5 + 103x^4 + 164x^3 + 103x^2 + 82x + 21 = 0$$

tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani har ikkala qismni x^3 ga bo'lamiz:

$$21\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 82\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 103\left(x + \frac{1}{x}\right) + 164 = 0$$

Agar $x + \frac{1}{x} = t$ desak, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ bo'ladi. Natijada t ga nisbatan tenglamaga ega bo'lamiz:

$$21t^3 + 82t^2 + 40t = 0 \implies t(21t^2 + 82t + 40) = 0.$$

Bu tenglama ikki tenglamaga ajraladi $t_1 = 0$ va $t_2 = -\frac{4}{7}$, $t_3 = -\frac{10}{3}$

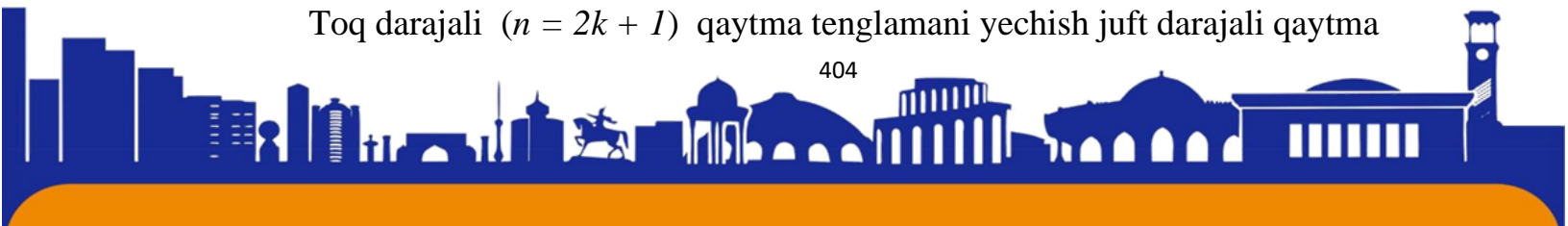
Agar 1) $t_1 = 0$ bo'lsa, $x + \frac{1}{x} = 0 \implies x^2 + 1 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va uningildizlari $x_1 = -i$, $x_2 = i$ ga teng bo'ladi.

2) $t_2 = -\frac{4}{7}$ bo'lsa, $7x^2 + 4x + 7 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va uningildizlari $x_3 = \frac{-2-3i\sqrt{5}}{7}$, $x_4 = \frac{-2+3i\sqrt{5}}{7}$ ga teng bo'ladi.

3) $t_3 = -\frac{10}{3}$ bo'lsa, $3x^2 + 10x + 3 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va uningildizlari $x_5 = -\frac{1}{3}$, $x_6 = -3$ ga teng bo'ladi.

Javob: $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = \frac{-2-3i\sqrt{5}}{7}$, $x_4 = \frac{-2+3i\sqrt{5}}{7}$, $x_5 = -\frac{1}{3}$, $x_6 = -3$.

Toq darajali ($n = 2k + 1$) qaytma tenglamani yechish juft darajali qaytma





tenglamani ychishga keltiriladi.

Misol-2. Ushbu

$$x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0$$

tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama beshinchi darajali qaytma tenglama bo'lib, $\lambda = -2$ ga teng. Tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 \cdot (-2) + 3x \cdot (-2)^3 + (-2)^5 = 0.$$

$x = 2$ tenglamaning ildizi bo'ladi, bundan tenglamaning chap qismi hadlarini guruhlaymiz:

$$\begin{aligned} x^5 - 32 + 3x^4 - 24x - x^3 + 2x^2 &= 0 \\ (x^5 - 32) + 3x(3x^3 - 8) - x^2(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ko'paytichilarga ajratamiz:

$$(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) + 3x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16) = 0$$

$$1) \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.$$

2) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0$ tenglama to'rtinchi darajali qaytma tenglama bo'lib, bunda $\lambda = 4$ ga teng.

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0$$

$x = 0$ tenglamaning ildizi emas. Tenglamaning ikkala tomonini x^2 ga bo'lamiz:

$$x^2 + 5x + 9 + \frac{20}{x} + \frac{16}{x^2} = 0 \text{ yoki } \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{4}{x}\right) + 9 = 0.$$

$x + \frac{4}{x} = y$ deb belgilash kiritamiz va $x^2 + \frac{16}{x^2} = y^2 - 8$ ni hosil qilamiz.

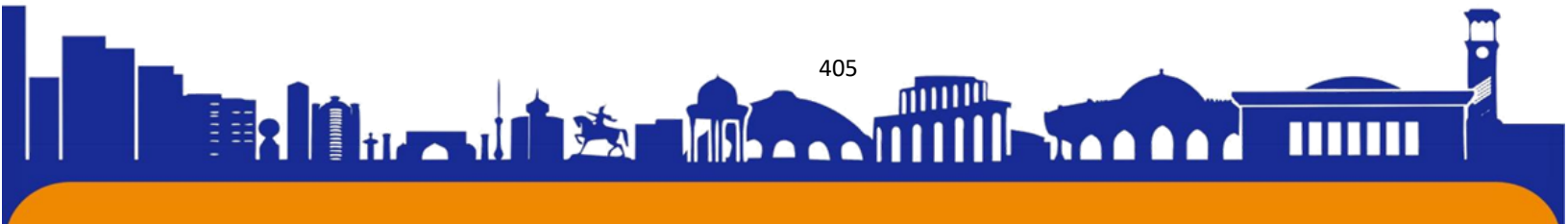
topilganlarni oxirgi tenglamaga quyamiz:

$$y^2 - 8 + 5y + 9 = 0 \Rightarrow y^2 + 5y + 1 = 0.$$

Quyidagi tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani ildizlarini topamiz: $D = 25 - 4 = 21 > 0$.

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; y_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}.$$

Demak, tenglama quyidagi tenglamalar juftligiga teng kuchli:





$$1) \quad x + \frac{4}{x} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow 2x^2 + (5 + \sqrt{21})x + 8 = 0.$$

$$2) \quad x + \frac{4}{x} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow 2x^2 + (5 - \sqrt{21})x + 8 = 0.$$

Ikkinchi tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas. Birinchisining ildizlari

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21} - \sqrt{10\sqrt{21} - 18}}{4}; \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{21} + \sqrt{10\sqrt{21} - 18}}{4}$$

$$\text{Javob: } \left\{ 2, \frac{-5 - \sqrt{21} \pm \sqrt{10\sqrt{21} - 18}}{4} \right\}.$$

Ta'rif. Ushbu

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 a = 0, (a \neq 0, \lambda \neq 0)$$

ko'rinishidagi tenglamalar *to'rtinchi darajali qaytma tenglamalar* deyiladi.

Simetrik tenglamalar qaytma tenglamalarning xususiy holi hisoblanadi.

Masalan, $\lambda = 1$ da to'rtinchi darajali qaytma tenglama to'rtinchi darajali simmetrik tenglamaga aylanadi.

To'rtinchi darajali qaytma tenglamani yechish uchun tenglamaning ikkala tomonini x^2 ga bo'lsak:

$$ax^2 + bx + c + \frac{\lambda b}{x} + \frac{\lambda^2 a}{x^2} = 0. \quad (1)$$

(1) ko'rinishidagi tenglama hosil bo'ladi. (1) tenglamani bir xil foeffitsiyentli hadlarini guruhlaymiz:

$$a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

hosil bo'ladi. Bunda $x + \frac{\lambda}{x} = y$ deb belgilash kiritamiz va

$$\left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$$

ni hosil qilamiz. Bu qiymatlarni (2) ga qo'ysak, $a(y^2 - 2\lambda) + by + c = 0$ yoki $ay^2 + by + (c - 2a\lambda) = 0$. Bu kvadrat tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

Agar $D \geq 0$ bo'lsa, y_1 va y_2 ildizlar topiladi. Bu qiymatlarni yuqoridagi belgilashga qo'yamiz:

$$1) \quad x + \frac{\lambda}{x} = y_1 \quad 2) \quad x + \frac{\lambda}{x} = y_2$$

Bu iki tenglamani yechib, to'rtinchi darajali qaytma taenglamaning ildiz-





larini topamiz.

Misol-2. Ushbu

$$3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$$

tenglamani yeching.

Yechish: $x = 0$ berilgan tenglamaning ildizi emas. Tenglamaning ikkala tomonini x^2 ga bo'lamiz:

$$3x^2 - 4x - 3 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2} = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{2}{x}\right) - 3 = 0.$$

$x + \frac{2}{x} = y$ belgilash kiritamiz. Bunda $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$ ekanligini

topamiz va oxirgi tenglamaga qo'yamiz:

$$3(y^2 - 4) - 4y - 3 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 4y - 15 = 0.$$

Kvadrat tenglamani yechib, ildizlari $y_1 = \frac{-5}{3}$ va $y_2 = 3$ ekanligini aniqlaymiz.

Keyin belgilashga qaytamiz:

$$1) \quad x + \frac{2}{x} = \frac{-5}{3} \Rightarrow 3x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$2) \quad x + \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2.$$

Javob: $\{1, 2\}$.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. A.U.Abduhamidov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov "Algebra va matematik analiz asoslari" 1-2 qism. "O'quvchi".T.2008.
2. Nassiet S, Torte D, Rivoallan L, Matematik Analiz. Didier, Paris, 1995.
3. Alimov Sh.A va b. Algebra va analiz asoslari, 10-11. "O'qituvchi", 1996 .
4. <http://www.ziyonet.uz>
5. <http://www.edu.u>

