

MURAKKAB DINAMIK JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA SONLI USULLAR ASOSIDA TAHLIL QILISH

Saidnazarov Zoir Rahmon o'g'li

Surxondaryo viloyati Bandixon tumani 8-maktabda matematika o'qituvchi

saidnazarovzoir070797@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada murakkab dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish, oddiy differensial tenglamalar tizimlari orqali ifodalash va ularni sonli usullar yordamida tadqiq etish masalalari ko'rib chiqildi. Nazariy qismda model qurish, diskretlash, verifikatsiya, validatsiya, qadam tanlash, barqarorlik va hisoblash xatolari o'rtasidagi bog'lanish tahlil qilindi. Amaliy tajriba sifatida Lorenzning uch o'lchovli nolinear tizimi tanlanib, Euler, klassik to'rtinchi tartibli Runge–Kutta, adaptiv RK45 va DOP853 usullari bilan yechildi. Hisoblashlar Euler usulining kichik qadamda ham yuqori global xatoga ega ekanini, RK4 esa xuddi shu qadamda ancha aniq natija berishini ko'rsatdi. Boshlang'ich shartni 10^{-8} miqdorga o'zgartirish uzoq vaqt oralig'ida trayektoriyalarning sezilarli ajralishiga olib keldi. Bu holat xaotik tizimlarda yuqori tartibli algoritmnining o'zi yetarli emasligini, natijani talqin qilishda model sezgirliги va prognoz gorizontini ham hisobga olish zarurligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: matematik model, dinamik tizim, sonli usul, Runge–Kutta, Euler usuli, Lorenz tizimi, kaos, barqarorlik, adaptiv qadam, sonli xatolik.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы математического моделирования сложных динамических процессов, их представления в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования численными методами. Проанализирована взаимосвязь между построением модели, дискретизацией, верификацией, валидацией, выбором шага, устойчивостью и вычислительной погрешностью. В качестве вычислительного эксперимента использована

трехмерная нелинейная система Лоренца, решенная методами Эйлера, классическим методом Рунге–Кутты четвертого порядка, адаптивным RK45 и DOP853. Расчеты показали, что метод Эйлера даже при малом шаге дает существенно большую глобальную погрешность, тогда как RK4 при том же шаге значительно точнее. Изменение начального условия на 10^{-8} приводит на длительном интервале к заметному расхождению траекторий, что подтверждает необходимость учитывать чувствительность модели и горизонт предсказуемости.

Ключевые слова: математическая модель, динамическая система, численный метод, Рунге–Кутта, метод Эйлера, система Лоренца, хаос, устойчивость, адаптивный шаг, численная погрешность.

Abstract. This article examines mathematical modeling of complex dynamical processes, their representation by systems of ordinary differential equations, and their numerical investigation. The theoretical discussion focuses on model construction, discretization, verification, validation, time-step selection, stability, and error propagation. As a computational case study, the three-dimensional nonlinear Lorenz system is solved using the Euler method, the classical fourth-order Runge–Kutta method, adaptive RK45, and DOP853. The calculations show that Euler integration produces a much larger global error even at a small fixed step, whereas RK4 is substantially more accurate at the same step size. A perturbation of only 10^{-8} in the initial condition eventually causes pronounced trajectory separation. The results demonstrate that in chaotic systems high-order integration alone is insufficient: sensitivity, numerical tolerance and the practical prediction horizon must also be considered.

Keywords: mathematical model, dynamical system, numerical method, Runge–Kutta, Euler method, Lorenz system, chaos, stability, adaptive step, numerical error.

KIRISH

Real tizimlarning katta qismi vaqt bo'yicha o'zgaradi va ularning holati bir nechta o'zaro bog'langan omillar bilan belgilanadi. Atmosfera dinamikasi, elektr zanjirlari, populyatsiyalararo raqobat, kimyoviy kinetika, transport oqimlari, texnologik jarayonlar va moliyaviy bozorlar bunga misol bo'la oladi. Bunday obyektlarda faqat statik



bog'lanishni bilish yetarli emas; tizimning holati qanday tezlikda va qaysi yo'nalishda o'zgarayotganini ifodalash zarur. Shu sabab differensial tenglamalar dinamik jarayonlarni modellashtirishning asosiy matematik vositalaridan biri hisoblanadi.

Murakkablikning ikkinchi manbai nolinearlikdir. Nolinear tizimlarda kichik parametr o'zgarishi sifat jihatidan yangi rejimni yuzaga keltirishi, muvozanat nuqtasi barqarorligini yo'qotishi yoki xaotik harakat paydo bo'lishi mumkin. Lorenzning 1963-yilda taklif qilingan modeli bunga klassik misoldir: uchta oddiy differensial tenglamadan iborat bo'lishiga qaramay, u boshlang'ich shartlarga kuchli sezgirlik va uzoq muddatli prognozning chegaralanganligini namoyon qiladi (Lorenz, 1963).

Ko'pchilik real modellar analitik yechimga ega emas. Bu nuqtada sonli usul model bilan tajriba o'rtasidagi ko'prikk aylanadi. Biroq sonli yechimni "kompyuter chiqargan javob" sifatida qabul qilish metodik xato bo'ladi. Diskretlash qadami, algoritm tartibi, stiff yoki non-stiff xususiyat, lokal va global xatolik, toleranslar hamda kompyuter arifmetikasining aniqligi yakuniy natijaga ta'sir qiladi. Shu sabab matematik model va sonli algoritm yagona hisoblash tizimi sifatida ko'rilishi lozim.

Maqolaning maqsadi murakkab dinamik tizimlarni matematik modellashtirishning asosiy bosqichlarini tizimlashtirish, turli sonli integratsiya usullarining imkoniyat va cheklovlarini qiyoslash hamda Lorenz tizimi misolida aniqlik, qadam va boshlang'ich shartlarga sezgirlikning amaliy ta'sirini ko'rsatishdan iborat.

METODOLOGIYA VA ADABIYOTLAR TAHLILI

Tadqiqot nazariy-komparativ tahlil va hisoblash eksperimenti asosida bajarildi. Sonli differensial tenglamalar bo'yicha klassik manbalar sifatida Hairer, Nørsett va Wanner, Butcher, Press va hammualliflarning ishlari tahlil qilindi. Adaptiv integratsiya vositalarining zamonaviy amaliy ifodasi sifatida SciPy kutubxonasidagi solve_ivp arxitekturasini ko'rib chiqildi. Ushbu paket non-stiff masalalar uchun RK23, RK45 va DOP853 kabi ochiq Runge–Kutta usullarini, stiff masalalar uchun esa Radau va BDF kabi noaniq usullarni taqdim etadi.

Dinamik model umumiy ko'rinishda $dy/dt=f(t,y,p)$, $y(t_0)=y_0$ shaklida beriladi. Bu yerda y - tizim holati vektori, p - parametrlar to'plami, f esa tizim evolyutsiyasini belgilovchi nolinear operator. Sonli yechim t vaqt o'qini diskret tugunlarga bo'lib, uzluksiz masalani



chekli ketma-ket hisoblashlarga aylantiradi. Euler usuli $y_{n+1}=y_n+h f(t_n, y_n)$ ko'rinishidagi birinchi tartibli sxema bo'lsa, klassik RK4 bir qadam ichida to'rtta oraliq qiyalikdan foydalanib to'rtinchi tartibli aniqlik beradi.

Adaptiv usullarning ustunligi vaqt qadamini oldindan qat'iy belgilash shart emasligidadir. RK45 Dormand–Prince 5(4) juftligidan foydalanib, har bir qadamda ichki xatolik bahosini hosil qiladi va rtol hamda atol talablari asosida qadamni avtomatik moslashtiradi. SciPy hujjatlarida RK23, RK45 va DOP853 non-stiff masalalar, Radau va BDF esa stiff tizimlar uchun tavsiya qilinadi. Bu tanlov algoritm nomidan ko'ra masalaning spektral va vaqt masshtabi xususiyatlariga bog'liq.

Hisoblash tajribasi uchun Lorenz tizimi olindi: $dx/dt=\sigma(y-x)$, $dy/dt=x(\rho-z)-y$, $dz/dt=xy-\beta z$. Parametrlar $\sigma=10$, $\rho=28$, $\beta=8/3$ va boshlang'ich holat (1,1,1) qilib olindi. Etalon yechim DOP853 usulida $rtol=10^{-12}$, $atol=10^{-14}$ va maksimal 0,005 qadam bilan hisoblandi. Euler va RK4 uchun $h=0,01$ belgilandi; RK45 va DOP853 uchun adaptiv qadam qo'llandi. Konvergensiyani baholashda $T=2$ oralig'i, xaotik sezgirlikni ko'rsatishda esa $T=30$ oralig'i ishlatildi.

1-jadval. Dinamik tizimlarni integratsiyalashda qo'llaniladigan asosiy sonli usullar

Usul	Tartib	Tip	Afzallik	Asosiy cheklov
Euler	1	Ochiq, bir qadamli	Juda sodda, tez prototiplash	Katta global xato; barqarorlik sohasi kichik
RK4	4	Ochiq, bir qadamli	Aniqlik va soddalik muvozanati	Qadam adaptiv emas; stiff masalada samarasiz
RK45	5(4)	Ochiq, adaptiv	Ichki xatolik nazorati va avtomatik qadam	Kuchli stiff tizimda ko'p qadam talab qiladi

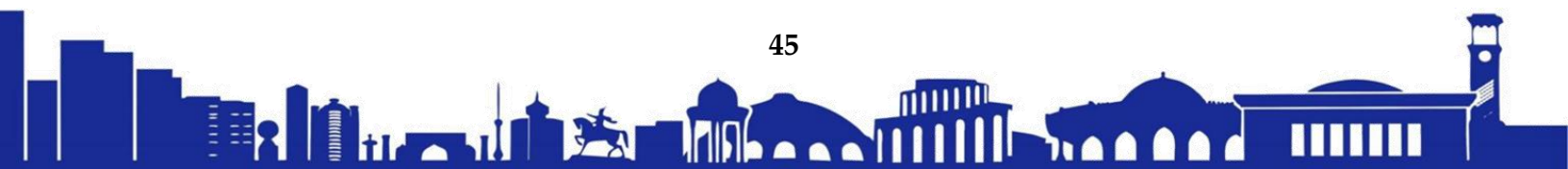
DOP853	8	Ochiq, adaptiv	Yuqori aniqlikda samarali	Har qadam hisoblash xarajati yuqoriroq
Radau	5	Noaniq Runge–Kutta	Stiff masalalar uchun barqaror	Jacobian va iteratsion yechim xarajati
BDF	1–5	Noaniq ko‘p qadamli	Stiff tizimlarda samarali	Boshlash va qadam o‘zgarishida murakkabroq

NATIJALAR

Hisoblash tajribasining birinchi natijasi usul tartibining amaliy ahamiyatini yaqqol ko‘rsatdi. $T=5$ gacha bo‘lgan intervalda Euler va RK4 bir xil $h=0,01$ qadam bilan 500 ta qadam bajardi, biroq ularning etalon yechimga nisbatan xatolari keskin farq qildi. Xaotik tizimda vaqt ortishi bilan hatto kichik lokal xatolar ham trayektoriya bo‘ylab kuchayishi mumkinligi sabab yakuniy nuqtadagi farq faqat usul tartibini emas, tizimning o‘z sezgirligini ham aks ettiradi.

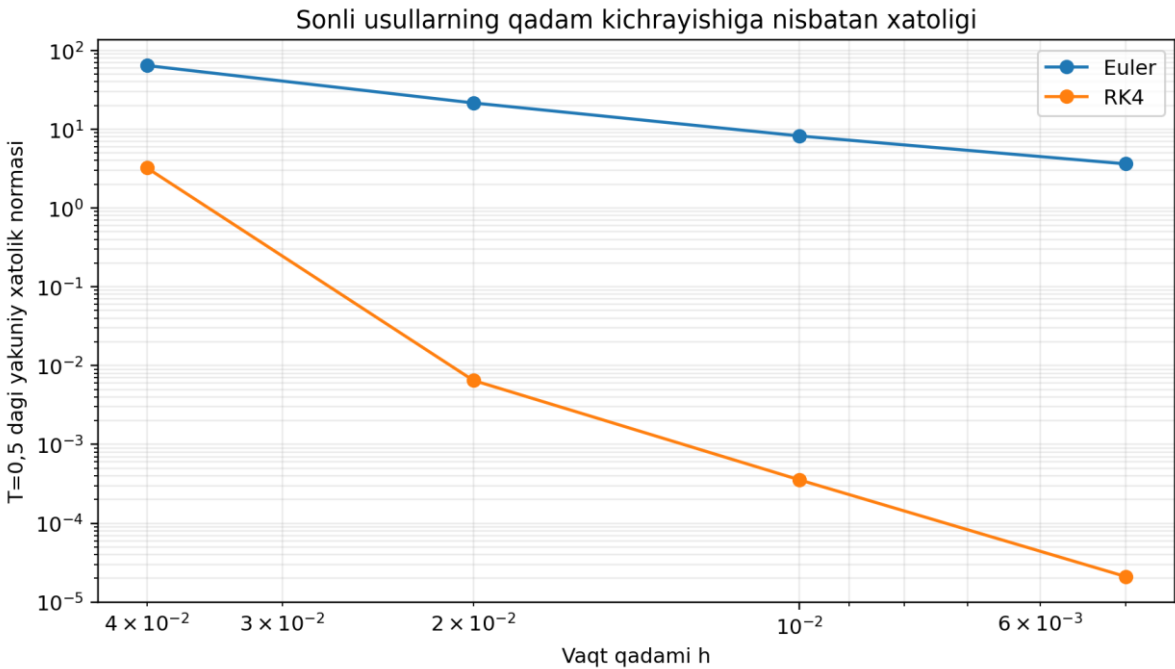
2-jadval. Lorenz tizimi uchun sonli integratsiya natijalari ($T=5$)

Usul	h	Qadamlar	Yakuniy xato	Maks. xato	Vaqt, ms	y(T)
Euler	0.010	500	2.600e+01	2.706e+01	1.44	(10.296; 12.744; 26.086)
RK4	0.010	500	2.420e-04	7.982e-04	10.39	(-6.512; -6.974; 23.924)



RK45 adaptiv	adaptiv	165	2.607e-04	3.056e-04	9.20	(-6.512; - 6.974; 23.924)
DOP853 adaptiv	adaptiv	131	1.920e-08	2.300e-08	28.95	(-6.512; - 6.974; 23.924)

Jadvaldagi hisoblash vaqtlari ma’lum bir kompyuter ishga tushirishiga bog‘liq bo‘lgani uchun mutlaq benchmark sifatida emas, nisbiy indikatsiya sifatida talqin qilinishi kerak. Aniqlik nuqtai nazaridan esa tendensiya barqaror: birinchi tartibli Euler sxemasida diskretlash xatosi tezroq yig‘iladi, yuqori tartibli usullarda esa bir xil vaqt intervalini ancha kam global xato bilan bosib o‘tish mumkin.

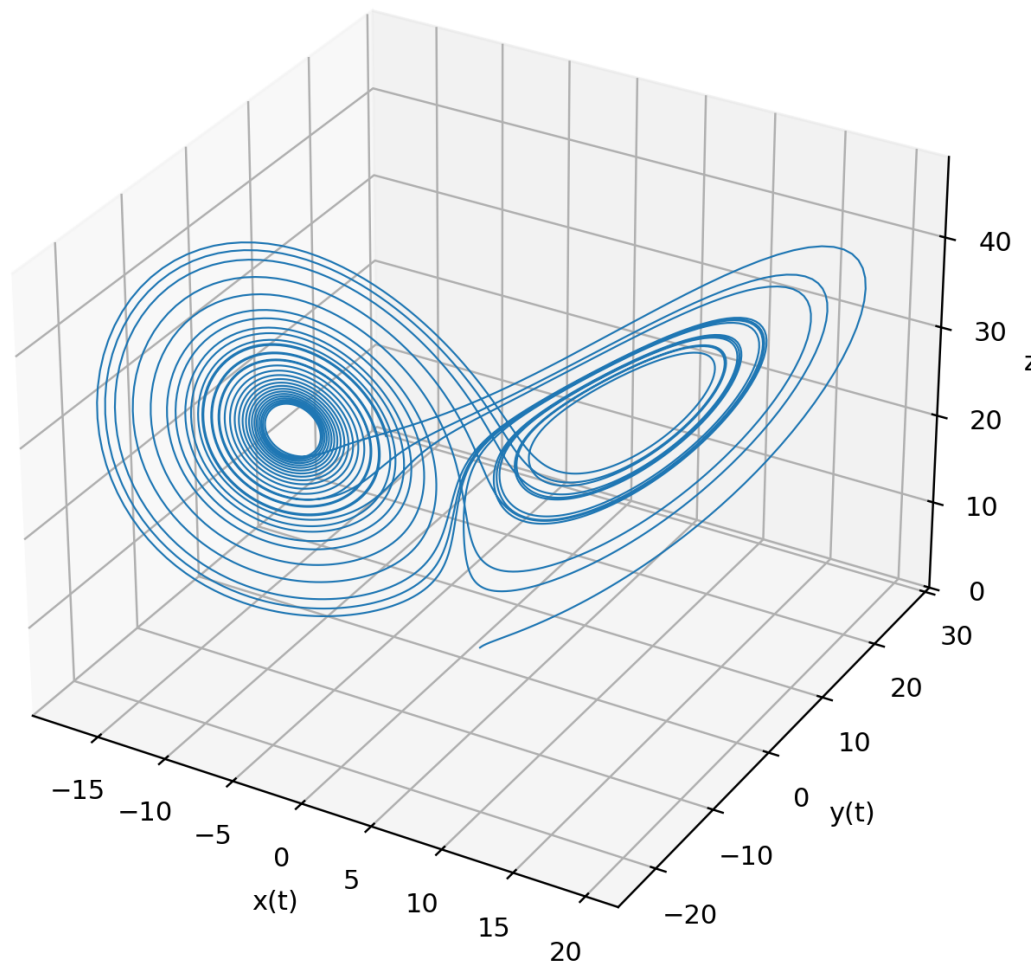


1-diagramma. Euler va RK4 usullarida qadam kichrayishi bilan $T=0,5$ dagi yakuniy xatolikning o‘zgarishi.

Konvergenatsiya diagrammasida Euler usuli xatosi qadam ikki baravar kamayganda taxminan birinchi tartib qonuniyatiga mos kamayadi. RK4 da esa qadam kamayishi bilan xatolik ancha tez pasayadi. Bu natija nazariy tartib bilan mos: Euler uchun global xato

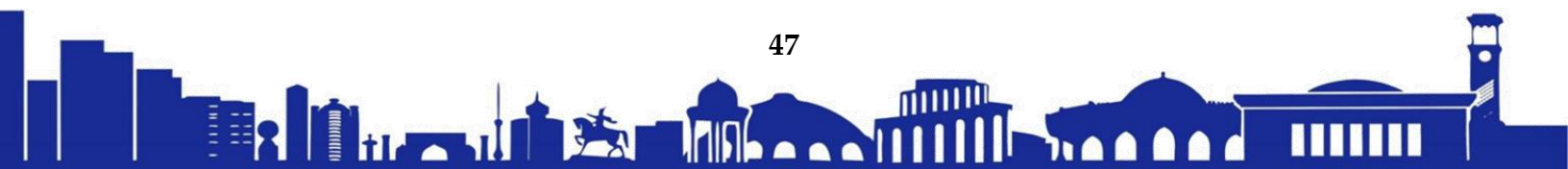
$O(h)$, RK4 uchun $O(h^4)$ darajasidadir. Biroq xaotik tizimda juda uzun vaqt oralig'ida bu tartiblar "aniq trayektoriyani abadiy saqlab qolish" kafolatini bermaydi.

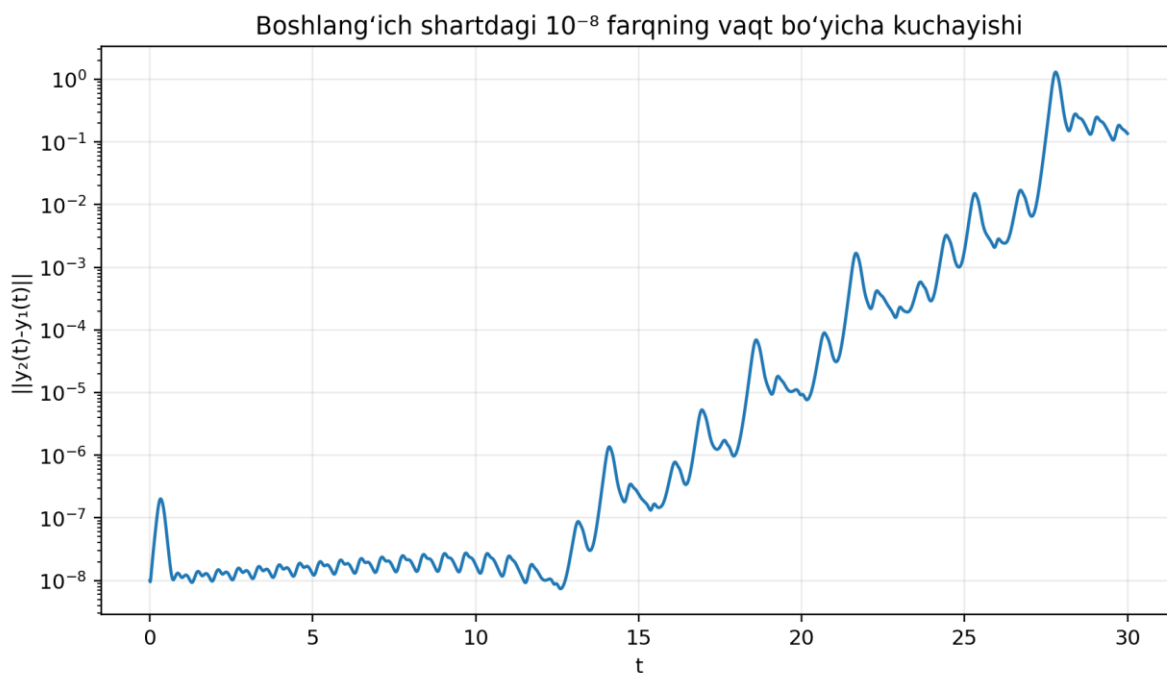
Lorenz tizimining fazoviy trayektoriyasi



1-rasm. Lorenz tizimining RK4 usulida hisoblangan fazoviy trayektoriyasi ($\sigma=10$, $\rho=28$, $\beta=8/3$).

Fazoviy trayektoriya Lorenz attraktoriga xos ikki qanotli tuzilmani hosil qiladi. Bu rasm modelning fizik mohiyatidan tashqari sonli tajribada muhim metodik fikrni ham ko'rsatadi: trayektoriya chegaralangan sohada qoladi, lekin uning qaysi vaqtda qaysi "qanot" atrofida aylanishi boshlang'ich shart va hisoblash xatosiga sezgir.





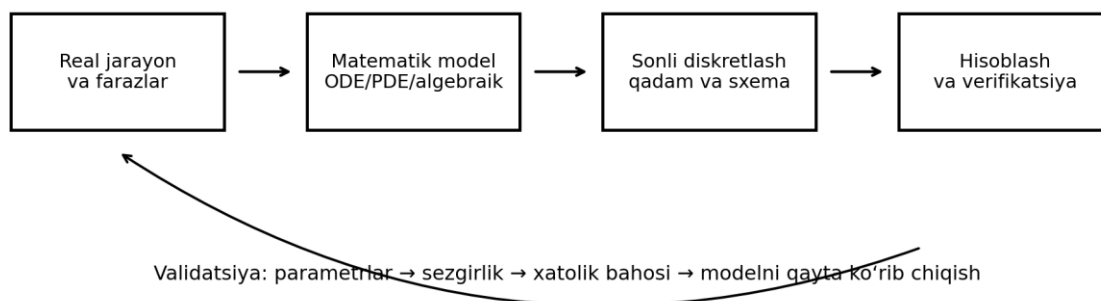
2-diagramma. Boshlang'ich shartdagi 10^{-8} farq sabab ikki trayektoriya orasidagi masofaning vaqt bo'yicha o'sishi.

Ikkinchi tajribada faqat $x(0)$ qiymati 10^{-8} ga o'zgartirildi. Dastlab ikki yechim deyarli ustma-ust yuradi, keyin esa farq eksponentsial xarakterda kuchayib, uzoq intervalda makroskopik darajaga chiqadi. Bu natija Lorenzning boshlang'ich shartlarga sezgirlik haqidagi klassik xulosasini sonli tarzda takrorlaydi. Muhim jihat shundaki, bunday ajralishni faqat "algoritm xatosi" deb bo'lmaydi: nolinear dinamik tizimning o'zi perturbatsiyani kuchaytiradi.

3-jadval. Sonli tajriba natijasidan kelib chiqadigan metodik talablari

Bosqich	Asosiy savol	Amaliy tekshiruv
Model tenglamalari	Fizik yoki jarayoniy bog'lanishlar to'g'ri ifodalanganmi?	Parametr identifikatsiyasi va validatsiya
Diskretlash	Qadam va sxema masala xususiyatiga mosmi?	Konvergensiya testi va qadamni kamaytirish

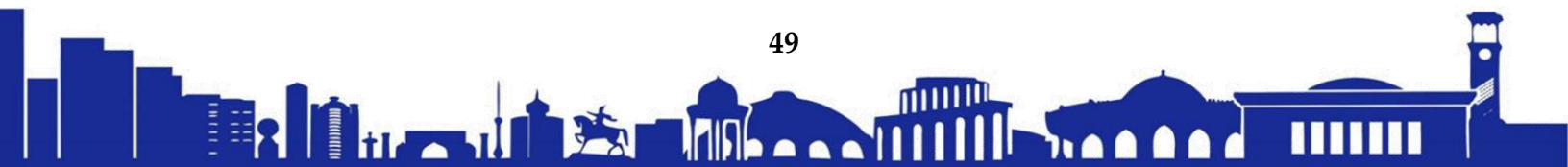
Barqarorlik	Usul qattiq/stiff rejimda buzilmayaptimi?	Radau/BDF kabi noaniq usullarni sinash
Xaotik sezgirlik	Kichik perturbatsiya uzoq prognozni buzadimi?	Prognoz gorizontini chegaralash, ansambl yondashuvi
Hisoblash aniqligi	rtol/atol natijani o'zgartiryaptimi?	Tolerans sensitivlik testi
Validatsiya	Sonli yechim real kuzatuvga mosmi?	Mustaqil ma'lumotlar bilan solishtirish



2-rasm. Murakkab dinamik jarayonni matematik modeldan verifikatsiyalangan sonli natijagacha olib borish sxemasi.

MUHOKAMA

Natijalar sonli usul tanlashda bitta mezonga - masalan, “eng yuqori tartib”ga - tayanish yetarli emasligini ko‘rsatadi. Agar masala non-stiff bo‘lsa, RK45 yoki DOP853 kabi ochiq adaptiv sxemalar yaxshi ishlaydi. Agar tizimda vaqt masshtablari keskin farqlansa va stiff xususiyat paydo bo‘lsa, juda kichik qadamga majbur bo‘ladigan ochiq usul hisoblashni qimmatlashtiradi; bunday vaziyatda Radau yoki BDF maqsadga muvofiq bo‘lishi mumkin.



Euler usuli amaliyotda butunlay keraksiz emas. U algoritmni tushuntirish, tezkor prototip, sifat tahlili yoki juda kichik qadamli sodda tizimlarda foydali. Ammo murakkab nolinear jarayonlarda undan olingan chiroyli grafik yechimning to'g'riligini anglatmaydi. Grafik silliq bo'lishi mumkin, lekin faza xatosi va amplituda xatosi sezilarli bo'lishi ehtimoli mavjud.

Xaotik tizimlarda "aniqlik" tushunchasi ham ehtiyotkor talqin qilinishi kerak. Qisqa intervalda ikki yuqori aniqlikdagi usul bir xil trayektoriya beradi; uzoq intervalda esa juda kichik yumaloqlash yoki diskretlash farqi trayektoriyalarni ajratadi. Shunga qaramay, statistik xususiyatlar, attraktor geometriyasi, Lyapunov ko'rsatkichlari yoki invariant taqsimotlar barqarorroq bo'lishi mumkin. Demak, tadqiqot maqsadi aniq vaqt nuqtasini prognoz qilishmi yoki tizimning umumiy dinamik xususiyatini o'rganishmi - bu oldindan aniqlanishi zarur.

Model verifikatsiyasi va validatsiyasini bir-biriga aralashtirmaslik ham muhim. Verifikatsiya "tenglamalar to'g'ri yechildimi?" degan savolga javob beradi; validatsiya esa "to'g'ri tenglamalar tanlandimi va ular real jarayonni yetarli darajada ifodalayaptimi?" degan savolni tekshiradi. Sonli algoritm ideal ishlasa ham, noto'g'ri fizik farazga qurilgan model real jarayonni ishonchli bashorat qila olmaydi.

Murakkab tizimlarda parametrlarning noaniqligi ham sonli xatolikdan kam ahamiyatli emas. Shuning uchun keyingi bosqichlarda Monte-Karlo simulyatsiyasi, sezgirlik tahlili, parametrlarni optimallashtirish, ansambl hisoblash va ma'lumotga asoslangan identifikatsiya usullarini klassik ODE/PDE modellar bilan birlashtirish istiqbolli hisoblanadi. Ayniqsa katta o'lchamli modellar uchun parallel hisoblash, kamaytirilgan tartibli modellar va mashinaviy o'rganish bilan gibrid yondashuv hisoblash xarajatini pasaytirishi mumkin.

Mazkur ishning cheklovi shundaki, hisoblash tajribasi bitta klassik xaotik ODE tizimida olib borildi. Natijalarni stiff kimyoviy kinetika, fazaviy o'tishli PDE yoki kechikishli differensial tenglamalarga bevosita ko'chirish mumkin emas. Shunga qaramay, qadam, tartib, sensitivlik va verifikatsiya haqidagi metodik xulosalar keng sinfdagi dinamik modellar uchun umumiy ahamiyatga ega.

XULOSA

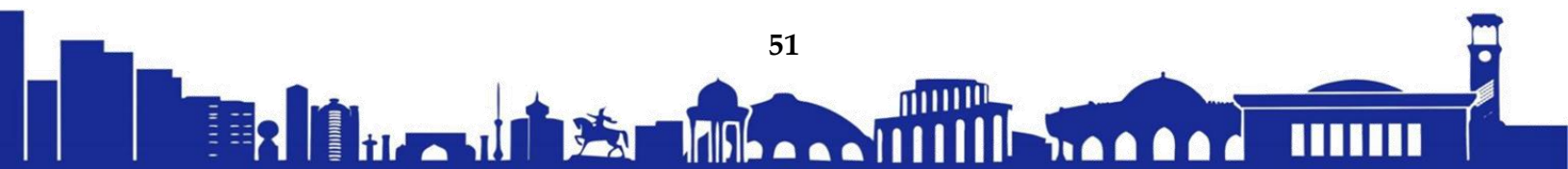
Murakkab dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish faqat differensial tenglama yozish bilan tugamaydi. Ishonchli natija uchun fizik faraz, parametr, boshlang'ich va chegaraviy shart, sonli diskretlash, barqarorlik, xatolik nazorati hamda validatsiya bir butun metodologik zanjir sifatida qaralishi kerak.

Lorenz tizimida o'tkazilgan sonli tajriba bir xil qadamda RK4 usuli Euler sxemasiga nisbatan ancha aniq ekanini, adaptiv yuqori tartibli usullar esa belgilangan toleransga qarab qadamni samarali boshqarishini ko'rsatdi. Shu bilan birga, boshlang'ich holatdagi 10^{-8} miqdordagi farqning vaqt o'tishi bilan keskin kuchayishi xotik jarayonlarda uzoq muddatli nuqtaviy prognozning tabiiy chegarasi mavjudligini tasdiqladi.

Amaliy tadqiqot uchun eng maqbul strategiya quyidagicha: avval modelning fizik va matematik asosini tekshirish; keyin masalaning stiff yoki non-stiff xususiyatini aniqlash; kamida ikki sonli sxema bilan konvergenstiyani solishtirish; qadam yoki tolerans sensitivligini baholash; so'ng real yoki etalon ma'lumot bilan validatsiya qilish. Ana shunda kompyuter hisoblashining natijasi oddiy raqam emas, ilmiy jihatdan himoyalangan xulosaga aylanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
2. Butcher, J. C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (3rd ed.). Wiley.
3. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (2nd rev. ed.). Springer.
4. Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems* (2nd rev. ed.). Springer.
5. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.



6. Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos* (2nd ed.). Westview Press.
7. Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (2nd ed.). Cambridge University Press.
8. Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3), 525–546.
9. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
10. SciPy Developers. (2026). `scipy.integrate.solve_ivp` documentation. SciPy Reference Guide.
11. Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM.
12. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics* (2nd ed.). Springer.