"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 3, ISSUE 02, 2025. FEBRUARY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

TEKISLIKDAGI HARAKAT, UNING ENG SODDA TURLARI, ANALITIK IFODASI

Xalmanov Ural Rasulovich
Jizzax davlat pedagogika universiteti, "Tabiiy va aniq fanlarda masofaviy ta'lim" kafedrasi o'qituvchisi xalmanov77@gmail.com
Aliqulova Shoxsanam
Jizzax davlat pedagogika universiteti, Matematika va informatika yo'nalishi 5-kurs talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada tekislikdagi harakat tushunchasi, uning eng sodda turlari va analitik ifodasi ko'rib chiqiladi. Geometriyada harakat deganda, tekislik yoki fazodagi barcha nuqtalar orasidagi masofani saqlovchi o'zgarishlar tushuniladi. Maqolada harakatning asosiy turlari – parallel siljish, aylanish va simmetriya akslantirishlari batafsil tahlil qilinadi. Shuningdek, ushbu harakatlarning analitik tavsifi, ya'ni koordinatalar yordamida ifodalanishi ham ko'rib chiqiladi. Harakatlarning matematik modellari va ularning amaliy qo'llanilishi geometriya, fizika va kompyuter grafikasi kabi sohalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Mazkur maqola tekislikdagi harakatning nazariy asoslarini tushunish va ularning real dunyodagi qo'llanilishiga doir bilimlarni kengaytirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Tekislikdagi harakat, geometrik transformatsiyalar, izometriya, parallel ko'chirish, aylanish harakati, akslantirish, transformatsiyalarning analitik ifodasi, koordinatalar o'zgarishi, matritsalar yordamida ifodalash, affin o'zgarishlar.

Maktab geometriya kursida eng sodda almashtirishlar bilan tanishish ko'zda tutiladi, ular: parallel ko'chirish, simmetriya burish va o'xshash almashtirishlardan iborat.

Parallel ko'chirish, simmetriya va burish barchasi adabiyotlarda bitta «harakat», yoki «siljitish» yoki «izometriya» deb aytiladi.

1-ta'rif. Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofani o'zgartirmaydigan almashtirish «*harakat*» yoki «izometriya» deyiladi.

Harakatni L orqali belgilaymiz.

L harakat bo'lsa, tekislikning har qanday ikki M,N nuqtasi uchun

$\rho(M,N) = \rho(L(M), L(N))$ $(M^1 = L(M)\ N^1 = L(N))$

Harakat xossalarini ko'rib chiqaylik.

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 3, ISSUE 02, 2025. FEBRUARY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

1°. Harakat kesmani o'ziga teng kesmaga o'tkazadi.

2°. Harakat bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtani, yana bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaga o'tkazadi.

3°. Harakat to'g'ri chiziqni, to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

4°. Harakat nurni nurga o'tkazadi.

5°. Harakatda burchak kattaligi o'zgartirmaydi.

6°. Harakat, parallel to'g'ri chiziqlarni ya'na parallel to'g'ri chiziqlarga o'tkazadi.

7°. Harakat ko'pburchakni yana ko'pburchakka o'tkazadi (bunda mos burchaklarning kattaligi, tomonlarining uzunliklari o'zgarmaydi)

8°. Harakat aylanani yana aylanaga o'tkazadi, bunda aylana radiuslari o'zgarmaydi.

9°. Tekislikdagi harakatlar to'plami gruppa tashkil qiladi

Isboti: 1° xossani isbotlaylik. Tekislikda ikkita A va B nuqtalarni olaylik. Harakat A va B nuqtalarni $L(A)=A'$ va $L(B)=B'$ nuqtalarga o'tkazsin.

Agar $C\in AB$ bo'lsa, u holda (1-chizma)

$\rho(AC)+\rho(CB)=\rho(AB)$ (1)

Harakat ta'rifiga asosan

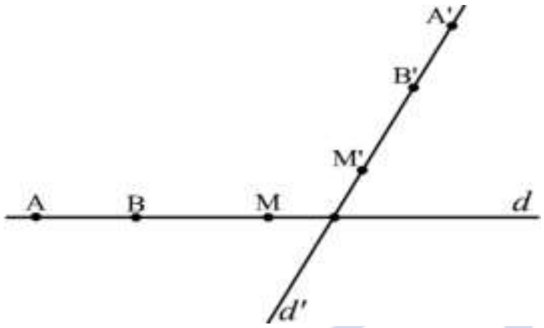
$\rho(A'C')+\rho(C'B')=\rho(A'B')$ (2)

bu esa $C'\in A'B'$ ko'rsatadi.

Aksincha, agar qandaydir C' nuqta $C'\in A'B'$ bo'lsa, u holda (2) tenglik o'rinli bo'ladi, bundan (1) tenglikning o'rinligini, undan esa $C\in AB$ bo'ladi.

2° isbotini ko'rib chiqaylik. A, B, C bir to'g'ri chiziq nuqtalari bo'lsin, harakatda ularga A', B', C' nuqtalar mos kelsin. Aniqlik uchun C nuqta A va B nuqtalar orasida yotsin deylik. U holda 1° xossaga asosan $C'\in A'B'$ da yotadi. Demak, A', B', C' nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi.

Nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotish xossasini *kollinearlik munosabati* deyiladi. Kollinearlik munosabatini saqlovchi almashtirish kollineatsiya deyiladi. Demak, tekislikdagi harakat kollineatsiyadan iborat bo'ladi.



2-chizma

3° Tekislikda L-harakat va ixtiyoriy d to'g'ri chiziq berigan bo'lsin. d to'g'ri chiziqda yotuvchi ikkita A va B nuqtalarni olamiz. Harakat $L(A)=A'$, $L(B)=B'$. A' va B' nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni d' bilan belgilaymiz (2-chizma).

Agar M nuqta d to'g'ri chiziqqa qarashli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda 1° xossaga ko'ra $L(M)=M'\in d'$.

4°-9° larni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganiladi.

2-ta'rif. Agar ikki figuradan birini ikkinchisiga o'tkazadigan harakat mavjud bo'lsa, bu figuralar *kongruent* deyiladi. Bu kongruent figuralar tekislikdagi vaziyatlari bilan farq qiladi xolos.

Teorema. Tekislikdagi L harakat R to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini, R' to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga o'tkazsa, $M'=L(M)$ nuqtaning R' koordinatalar sistemasidagi koordinatalari M nuqtaning R to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidagi koordinatalari bilan bir xil bo'ladi (3-chizma).

Isbot. $R(0,i,j)$ tekislikdagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

$L(O) = O'$, $L(A_1)=A_1'$, $L(A_2)=A_2'$ o'tkaziladi. Yuqoridagi xossalarga asosan O'_1, A'_1 va A'_2 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi va $\angle A'_2O'A'_1=90^0$. Demak R' dekart koordinatalar sistemasi bo'ladi.

3-chizma

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtasini R ga nisbatan koordinatalari x,y bo'lsin.

$$x = \frac{OM_1}{OA_1} = -\frac{M_1O}{OA_1} = -(M_1A_1O)$$

$$y = \frac{OM_2}{OA_2} = -\frac{M_2O}{OA_2} = -(M_2A_2O)$$

M' nuqtaning R' ga nisbatan koordinatalari x',y' bo'lsin

$$x' = \frac{O'M'_1}{O'A'_1} = -\frac{M'_1O'}{O'A'_1} = -(M'_1A'_1O')$$

$$y' = \frac{O'M'_2}{O'A'_2} = -\frac{M'_2O'}{O'A'_2} = -(M'_2A'_2O')$$

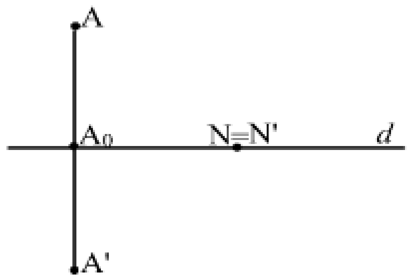
$(M,A,O) = (M^1{}_1 A^1{}_1 O^1)$, $(M_2A_2O) = (M'_2 A'_2 O')$ tengliklardan $x=x'$, $y = y'$.

2. Harakatning eng sodda turlarini ko'rib chiqaylik,

a) To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya (S_d)

Tekislikda d to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Tekislikdagi A, A^1 nuqtalar uchun AA^1 kesma d ga perpendikulyar bo'lib, AA^1 kesmaning o'rtasi d to'g'ri chiziqida yotsa, u holda bu nuqtalar d *to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik* deb ataladi va S_d ko'rinishda yoziladi.



4-chizma

d to'g'ri chiziqni *simmetriya o'qi* deyiladi.

Agar biror nuqta $N \in d$ bo'lsa, u holda $S_d(N)=N$ (4-chizma) ya'ni d to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tadigan qo'sh nuqtadan iborat bo'ladi.

Tekislikda bulardan tashqari bunday xossaga ega bo'lgan nuqta mavjud emas.

To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1° S_d simmetrik almashtirish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

2° S_d simmetrik almashtirish ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi.

Bu xossalarni koordinatalar metodidan foydalanib isbotlaymiz.

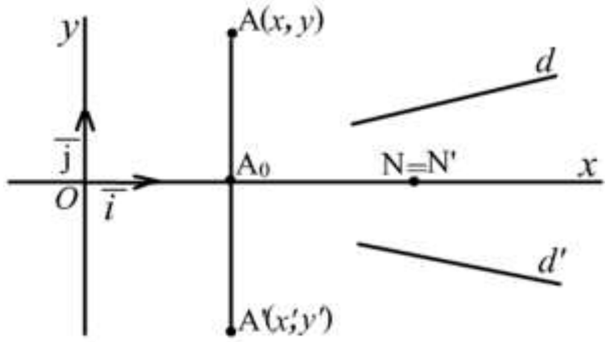
To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasining Ox o'qini simmetriya o'qi deb olsak, $A(x,y)$ nuqtaning aksi $A'(x',y')$ bo'ladi (5-chizma).

Bunda $\begin{matrix} x' = x \\ y' = -y \end{matrix}$ (3)

(3) Ox o'qiga nisbatan simmetrik almashtirish formulasi.

Simmetrik almashtirish xossalarini isbotlaylik.

1° Agar d to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax+By+C=0$ berilsa,



5-chizma

uning d^1 aksini (3) almashtirishdan foydalanib topamiz,

$Ax^1-By^1+C=0$. Bu yana to'g'ri chiziqdir.

2°. Tekislikning ixtiyoriy ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalari, $A'(x'_1, y'_1), B'(x'_2, y'_2)$ nuqtalar esa ularning aksi bo'lsin. (3) formulani e'tiborga olib, bu nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz

$$\rho(A', B') = \sqrt{(x_2^1 - x_1^1)^2 + (y_2^1 - y_1^1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 - (-y_1))^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(A, B)$$

Demak simmetrik almashtirish harakatdir.

4-ta'rif. Agar biror F figura d to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda d to'g'ri chiziq bu figuraning *simmetriya o'qi* deyiladi.

b) *Parallel ko'chirish* ($T_{\vec{a}}$). Tekislikda $\vec{a} \neq 0$ vektor berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a} \qquad (4)$$

shartni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltirishga tekislikdagi $\vec{a}$ *vektor qadar parallel ko'chirish* deyiladi. Uni $T_{\vec{a}}$ ko'rinishda belgilanadi. $\vec{a}$ vektorni *ko'chirish vektori* deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, $T_{\vec{a}}$ parallel ko'chirish tekislikning barcha nuqtalarini $\vec{a}$ vektor yo'nalishida $|\vec{a}|$ masofaga siljitadi.

Parallel ko'chirish quyidagi xossalarga ega:

1^0. Parallel ko'chirish, to'g'ri chiziqni unga parallel to'g'ri chiziqqa o'tkaziladi.

2^0. Parallel ko'chirishda ikki nuqta orasidagi masofaga o'zgarmaydi.

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 3, ISSUE 02, 2025. FEBRUARY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

Isbot: 1^0. Xossani isbotlaylik.

Agar $A^1(x^1{}_1;y^1{}_1)$ nuqta $A(x;y)$ nuqtaning aksi bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. Bunda $\vec{a}$ (x_0,y_0) va $\overrightarrow{AA'}$ $(x'-x, y'-y)$ koordinatalarga ega. (4) dan:

$$\begin{cases} x'-x = x_0 \\ y'-y = y_0 \end{cases}, \quad \text{ya'ni} \quad \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Parallel ko'chirish formulasiga ega bo'lamiz.

1^0. Tekislikda d to'g'ri chiziq $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. (5) formuladan foydalanib d to'g'ri chiziqni $\vec{a}$ vektor qadar parallel ko'chiramiz. Ya'ni $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$ qiymatlarni d to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'yib:

$$d^1: Ax^1 + By^1 + (C - Ax_0 - By_0) = 0 \qquad (6)$$

birinchi darajali tenglamaga ega bo'ldik, bu (6) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi, $d \parallel d^1$

Demak $T_{\vec{a}}(d) = d^1$ to'g'ri chiziq.

2°. Ikkita ixtiyoriy $A(x_1;x_2)$ va $B(x_2;\ y_2)$ nuqtalarning obrazlari $A^1(x^1{}_1,y^1{}_1)$ va $B^1(x^1{}_2,y^1{}_2)$ nuqtalar bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_0 \\ y'_1 = y_1 + y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = x_2 + x_0 \\ y'_2 = y_2 + y_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Ikkita A^1 va B^1 nuqtalar orasidagi masofani (7) formulani e'tiborga olib hisoblasak,

$$\rho(A^1, B^1) = \sqrt{(x_2^1 - x_1^1)^2 + (y_2^1 - y_1^1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(A, B)$$

Demak parallel ko'chirish harakat.

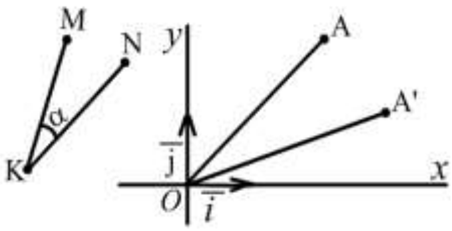
v) Burish (R^a)

Tekislikda yo'nalishga ega bo'lgan α burchak berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga ushbu

1. $\rho(0,A) = \rho(O,A^1)$;
2. $\angle A0A^1 = \angle NKM = \alpha$;

shartlarni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltiruvchi almashtirishga O nuqta atrofida berilgan α burchakka burish deyiladi. (6-chizma)



6-chizma

O nuqta burish markazi, α burish burchagi deyiladi.

Tekislikdagi O nuqta atrofidagi α burchakka burish $R^{\alpha}{}_0$ bilan belgilanadi.

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 3, ISSUE 02, 2025. FEBRUARY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

R^{α}_{0} burish quyidagi xossalarga ega:

1°. Burish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

2°. Ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi.

Bu xossalarni koordinatalar metodi bilan isbotlash mumkin.

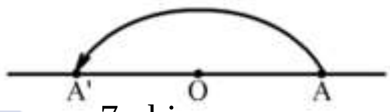
Burish ham harakat bo'ladi.

g) Markaziy simmetriya (S_0)

7-ta'rif. Tekislikdagi biror O nuqta atrofida $\alpha=180°$ ga burish O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish yoki markaziy simmetriya deyiladi va S_0 bilan belgilanadi.

O nuqta simmetriya markazi deyiladi.

(7-chizma)



7-chizma

Markaziy simmetriyada simmetriya markazi O nuqta A nuqta va uning aksi A^1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi va $OA=OA^1$.

Markaziy simmetriyaning harakat ekanligini isbotlash qiyin emas.

8-ta'rif. Agar birorta figura O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda O nuqta figuraning simmetriya markazi deyiladi.

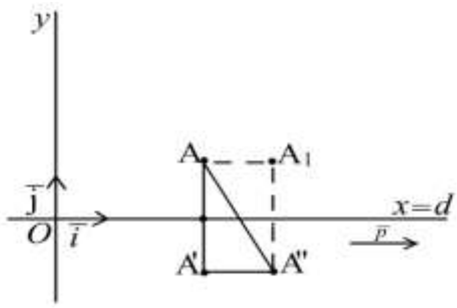
d) Sirpanuvchi simmetriya.

Tekislikda S_d simmetriya $T_{\vec{p}}$ $(\vec{p} \neq 0,\ \vec{p} \parallel d)$ parallel ko'chirish berilgan bo'lsin.

9-ta'rif. $f=T_{\vec{p}} \cdot S_d$ almashtirish kompozitsiyasi sirpanuvchi simmetriya deyiladi (8-chizma).

Agar $S_d(A)=A'$ ga va $T_{\vec{p}}(A')=A''$ ga o'tkazsa, u holda $f(A)=A''$ ga o'tkazadi.

Agar $T_{\vec{p}}(A)=A_1$ ga va $S(A_1)=A''$ ga o'tkazsa $f(A)=A''$ ga o'tkazadi (8-chizma).



8-chizma

Demak $T_{\vec{p}} \cdot S_d = S_d \cdot T_{\vec{p}}$.

Sirpanuvchi simmetriya kommutativlik xossasiga ega.

Agar $A(x,y)$, $A^1(x^1,y^1)$ $A^{11}(x^{11},y^{11})$ koordinatalarga ega, $d = Ox$ bo'lsa:

$$S_{0x}: \begin{cases} x^1 = x \\ y^1 = -y \end{cases} \qquad T_p: \begin{cases} x^{11} = x^1 + x_0 \\ y^{11} = y^1 \end{cases}$$

bundan
$$f:\begin{cases} x^{11} = x + x_0; \\ y^{11} = -y \end{cases} \tag{8}$$

(8) $d=Ox$ bo'lgan sirpanuvchi simmetriya formulasidir. Yuqoridagi ko'rilgan xossalar ham sirpanuvchi simmetriya uchun o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

(8) formuladan $\varepsilon = -1$ ekanligi ma'lum. Demak, sirpanuvchi simmetriya ikkinchi tur harakat.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Axmedov A. A., Sodiqov R. S. "Geometriya" – Toshkent: O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi, 2015.
2. Mahmudov N. "Matematik analiz va geometriya asoslari" – Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti, 2018.
3. Qosimov I., O'rozov M. "Geometriya: nazariya va amaliyot" – Toshkent: O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi nashriyoti, 2020.
4. Xamidov U. "Matematik transformatsiyalar va ularning qo'llanilishi" – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016.
5. Rashidov A., Norqulov B. "Geometriyaning asosiy tushunchalari va metodlari" – Toshkent: Fan va texnologiya, 2019.
6. Muminov S. "Geometriya va uning amaliy ahamiyati" – Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti, 2021.
7. Jo'rayev N. "Simmetriya va transformatsiyalar nazariyasi" – Toshkent: Fan, 2017.
8. Karimov H. "Geometrik modellar va ularning fizikaga tatbiqi" – Toshkent: Fan va texnologiya, 2014.