"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 2, ISSUE 6, 2024. JUNE
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

AYRIM SONLI TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH USULLARI

Sulaymonov Mirsaidjon Muxiddin o'g'li.
Qo'qon DPI Matematika kafedrasi o'qituvchisi.

Annotatsiya.

Ushbu maqolada ayrim sonli tengsizliklarni isbotlash usullari keltirilgan.

Аннотация

В данной статье представлены методы доказательства некоторых числовых неравенств.

Annotation

This article presents methods for proving some numerical inequalities.

Kalit so'zlar. Tengsizlik, sonli tengsizlik, o'rta arifmetik, o'rta geometrik.

Ta'rif: Agar $a-b$ ayirma musbat son bo'lsa, a soni b sonidan katta deyiladi va bu munosabat $a>b$ shaklida yoziladi. Agar $a-b$ ayirma manfiy bo'lsa, a soni b sonidan kichik deyiladi va $a<b$ shaklida yoziladi.

Istalgan a va b sonlar uchun quyidagi uchta munosabatdan faqat bittasi o'rinli:

1. $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;
2. $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$;
3. $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

Sonli tengsizliklar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, $a>c$ bo'ladi (tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasi).

2^0. Agar $a>b$ va $c\in R$ bo'lsa, $a+c>b+c$ bo'ladi.

3^0. Agar $a>b$ va $c>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot c$ bo'ladi.

4^0. Agar $a>b$ va $c<0$ bo'lsa, $a\cdot c<b\cdot c$ bo'ladi.

5^0. Agar $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, $a+c>b+d$ bo'ladi.

6^0. Agar $a>b>0$ va $c>d>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot d$ bo'ladi.

7^0. Agar $a>b>0$ va $n\in N$ bo'lsa, $a^n>b^n$ bo'ladi ($n-$toq son bo'lganda $b>0$ shart ortiqcha).

Quyida ayrim Tengsizliklarni isbotlashning usullari ko'ramiz.

1–misol. Istalgan a, b va c sonlari uchun $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$ ekanligini isbotlang.

Yechilishi. Istalgan a, b va c sonlari uchun $\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)$ ayirmani manfiy emasligini ko'rsatamiz:

$$\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)=\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)=$$

$$=\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2.$$

Istalgan sonning kvadrati nomanfiy son bo'lgani uchun $\left(a-b\right)^2\geq 0$ va $\left(a-c\right)^2\geq 0$. Demak, $\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)$ istalgan a, b va c sonlari uchun manfiy emas. Shuning uchun berilgan tengsizlik istalgan a, b va c sonlari uchun o'rinli. Jumladan, tenglik belgisi $a=b=c$ bo'lgandagina bajariladi. Δ

Tengsizlikning to'g'riligini ko'rsatish uchun uning har ikkala qismining ayirmasini musbat yoki manfiyligini aniqlash, ya'ni yuqoradagi misoldagidek bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlashga harakat qilish ayrim hollarda qiyinchiliklarni tug'diradi. Shuning uchun tengsizliklarni isbotlashda tengsizliklarning xossalaridan foydalanish tavsiya etiladi.

2-misol. Musbat a, b va c sonlari uchun $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: Tengsizlikning chap qismida shakl almashtirish bajarib, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6.$$

Ikkita musbat son uchun o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar orasidagi Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2,\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

3-misol. a, b va c musbat sonlar bo'lsin. $2(a^4+b^4+c^4)<(a^2+b^2+c^2)^2$ tengsizlik a, b va c faqat biror uchburchak tashkil qilgandagina bajarilishi mumkinligini isbotlang.

Yechilishi. Ravshanki, bizning tengsizligimiz

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2<0$$

tengsizlikka teng kuchli. Oxirgi tengsizlikning chap tomonini almashtiramiz:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-4a^2b^2=$$

$$=(a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab)=((a-b)^2-c^2)((a+b)^2-c^2)=$$

$$=(a-b+c)(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)$$

Demak, berilgan tengsizlik a, b va c biror uchburchak tashkil qilganda aniq ravishda bajariladigan ushbu

$$(a-b+c)(b+c-a)(a+b+c)(a+b-c)>0$$

tengsizlikka teng kuchli.

Endi faraz qilamiz, bu tengsizlik bajariladi, biroq $a,\ b$ va c biror uchburchak tashkil qilmaydi. U holda $a-b+c,\ b+c-a,\ a+b+c,\ a+b-c$ sonlardan kamida ikkitasi manfiy. $a+b-c<0$ va $b+c-a<0$ bo'lsin. Bu yerdan masalaning shartiga zid bo'lgan $2b<0$ tengsizlikni olamiz.

4-misol. Agar $a,\ b,\ c>0$ bo'lsa, $\dfrac{3}{1/a+1/b+1/c}\le\dfrac{a+b+c}{3}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: $9\le(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$,

$$\begin{cases} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}, \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}. \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{9\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}}=9.$$

5-misol. $6\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b)^2(a+b+c)^2$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi:

$$\times\begin{cases} 2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2 \quad \Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\geq 0 \\ 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(a+b+c\right)^2 \end{cases} \Rightarrow 2a^2+2b^2\geq a^2+b^2+2ab\Rightarrow\left(a-b\right)^2\geq 0.$$

$$6\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(a+b\right)^2\left(a+b+c\right)^2.$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Sh. Ismailov, A. Qo'chqorov, B. Abdurahmonov Tengsizliklar-I. Isbotlashning klassik usullari. O'quv-qo'llanma Toshkent 2008. [4, 15]
2. Ayupov Sh., Rihsiyev B., Qo'chqorov O. «Matematikadan olimpiada masalalari» 1,2 qismlar. T.: Fan, 2004. [3, 46]
3. Hojoo Lee. Topics in Inequalities-Theorems and Techniques. Seoul: 2004.