"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 1, ISSUE 7, 2023. OCTOBER
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

М.Мамажонов, доцент КГПИ
Х.М.Шерматова, преподаватель ФерГУ

В этом сообщении ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i\ (i=2,3,4),\end{cases}$

$a,b,c\in R$, $\gamma=b/a$, $1<\gamma<+\infty$, а $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, здесь G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2, G_3 и G_4 – треугольники с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; A, $D(-1,1)$, A_0 и B, $E(2,1)$, B_0 соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках A, B; A, A_0 и B, B_0 соответственно.

Эта работа является продолжением работы [1]. В этой работе поставлен один класс краевых задач для уравнения (1) при произвольных постоянных коэффициентов $a,b,c\in R$ и исследован случай 1° ($a\neq 0,\ b=0$). В работах [2,3] исследован случай 2° ($a=0,\ b\neq 0$), а в этой работе исследуется случай 7° при $1<\gamma<+\infty$.

Так как $\gamma=b/a$, $1<\gamma<+\infty$, то без ограничения общности можно полагать $a>0$, $b>0$. Тогда для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G

вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1/2, \quad (2) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1/2, \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ 1/2\le x\le 1, \quad (4) \qquad u|_{DF_1}=\psi_4(x),\ -1\le x\le -1/2, \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AD}=\psi_5(x),\ -1\le x\le 0, \quad (6) \qquad u|_{A_0D}=f_1(x),\ -1\le x\le -0, \quad (7)$$

$$u|_{B_0E}=f_2(x),\ 1\le x\le 2, \quad (8) \qquad u|_{EF_2}=\psi_6(x),\ 3/2\le x\le 2, \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE}=\psi_7(x),\ 1\le x\le 2 \quad (10)$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (11) \qquad u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (12)$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu_1(x),\ 0<x<1, \quad (13) \qquad u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le 1, \quad (14)$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \quad (15) \qquad u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_2(y),\ 0<y\le 1, \quad (16)$$

$$u(1+0,y)=u(1-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \quad (17) \qquad u_x(1+0,y)=u_x(1-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \quad (18)$$

$$u_{xx}(1+0,y)=u_{xx}(1-0,y)=\mu_3(y),\ 0<y\le 1. \quad (19)$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,7}\right), f_j\ (j=1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i, \nu_i, \mu_i\ (i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, $F_1(-1/2,1/2)$, $F_2(3/2,1/2)$.

Теорема. Если $\psi_1\in C^3[0,1/2]$, $\psi_2\in C^2[0,1/2]$, $\psi_3\in C^2[1/2,1]$, $\psi_4\in C^3[-1,-1/2]$, $\psi_5\in C^2[-1,0]$, $\psi_6\in C^3[3/2,2]$, $\psi_7\in C^2[1,2]$, $f_1\in C^3[-1,0]$, $f_2\in C^3[1,2]$, причем выполняются условия согласования $f_1(-1)=\psi_4(-1)$, $\psi_5(0)=\psi_2(0)$, $\psi_3(1)=\psi_7(1)$, $f_2(2)=\psi_6(2)$, $\psi_2'(1/2)=-\psi_3'(1/2)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорема доказывается методом построения решения. Здесь мы даем лишь идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y)\in G_1, \quad (20)$$

$$u_{ixx}-u_{iy}=\omega_i(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y)\in G_i\ (i=2,3,4), \quad (21)$$

“JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN” JURNALI
VOLUME 1, ISSUE 7, 2023. OCTOBER
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i(bx-ay)\ \left(i=\overline{1,4}\right)$– неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Нам следует разделить области $G_i\ (i=3,4)$ по две части с помощью открытыми отрезками A_0F_1 и B_0F_2. Тогда уравнение (21) $(i=3,4)$ можно переписать в виде

$$u_{ikxx}-u_{iky}=\omega_{ik}(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y)\in G_{ik}\ (i=3,4;\ k=1,2), \tag{22}$$

где введены обозначения $u_i(x,y)=u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(bx-ay)=\omega_{ik}(bx-ay)$, $(x,y)\in G_{ik}\ \ (i=3,4;\ k=1,2)$.

Сначала исследование проведем в области G_{32}. Записывая решение уравнения (22) $(i=3;\ k=2)$, удовлетворяющее условиям (7) и $u_{32y}(x,1)=\nu_4(x)$ ($\nu_4(x)$– неизвестная пока достаточно гладкая функция) и подставляя это решение в условие (6) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_{32}(bx-ay)$ в промежутке $-(b+a)\le bx-ay\le-\frac{b+a}{2}$.

Теперь переходим в область G_{31}. Записывая решение уравнения (22) $(i=3;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (14), (15) и подставляя это решение в условие (6), находим функцию $\omega_{31}(bx-ay)$ в промежутке $-\frac{b+a}{2}\le bx-ay\le 0$.

Пользуясь из условия $\left.\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x}-\frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}=\left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x}-\frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}$, находим функцию $\omega_{32}(bx-ay)$ в промежутке $-\frac{b+a}{2}\le bx-ay\le -a$.

Далее, подставляя формулу решения $u_{32}(x,y)$ в условие (5) после некоторых выкладок, находим функцию $\nu_4(x)$ в промежутке $-1\le x\le 0$.

Таким образом, мы нашли функцию $u_{32}(x,y)$ полностью в области G_{32}. Пользуясь из условия $u_{31}(x,y)\big|_{y=x+1}=u_{32}(x,y)\big|_{y=x+1}$, получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$.

Переходя в уравнениях (22) $(i=3;\ k=1)$ и (20) к пределу при $x\to 0$, имеем два соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\mu_2(y)$ и $\omega_{11}(-ay)$. Исключая из этих последних двух уравнений функцию $\mu_2(y)$ после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_{11}(bx-ay)$ в промежутке $-a\le bx-ay\le 0$

“JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN” JURNALI
VOLUME 1, ISSUE 7, 2023. OCTOBER
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

через неизвестной функции $\tau_2\left(y-\frac{b}{a}x\right)$, где введено обозначение
$$\omega_1(bx-ay)=\begin{cases}\omega_{12}(bx-ay), \text{ если } 0\le bx-ay\le b,\\ \omega_{11}(bx-ay), \text{ если } -a\le bx-ay\le 0.\end{cases}$$

Теперь переходим в область G_2. Записывая решение уравнения (21) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и подставляя это решение в условие (3) и (4) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_2(bx-ay)$ полностью.

Подставляя решение $u_2(x,y)$ в условие (2), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$. Переходя в уравнениях (1) и (21) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, имеем еще два соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\tau_1(x)$. Решая это уравнении при известных трех условиях, находим функцию $\tau_1(x)$.

Теперь переходим в область G_{42}. Записывая решение уравнения (22) $(i=4;\ k=2)$, удовлетворяющего условиям (8) и $u_4(x,1)=\nu_5(x)$ (где $\nu_5(x)$ неизвестная пока достаточно гладкая функция) и подставляя это решение в условие (10) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_{42}(bx-ay)$ в промежутке $\frac{3b-a}{2}\le bx-ay\le 2b-a$.

Далее, переходим в область G_{41}. Записывая решение уравнения (22) $(i=4;\ k=1)$, удовлетворяющего условиям (17), (18) и подставляя это решение в условие (10) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_{41}(bx-ay)$ в промежутке $b\le bx-ay\le\frac{3b-a}{2}$.

Переходя в уравнениях (22) $(i=4;\ k=1)$ и (20) к пределу при $x\to 1$, получим два соотношения между неизвестными функциями $\tau_3(y)$, $\mu_3(y)$ и $\omega_{41}(b-ay)$. Исключая из этих двух уравнений функцию $\mu_3(y)$ и меняя аргумент

$b-ay$ на $bx-ay$, получим соотношение между функциями $\omega_{41}(bx-ay)$ и $\tau_3(y)$ в промежутке $b-a\le bx-ay\le b$.

Далее, пользуясь из условия $\left.\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}=\left.\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}$, находим функцию $\omega_{42}(bx-ay)$ в промежутке $b-a\le bx-ay\le\frac{3b-a}{2}$.

Теперь подставляя решение $u_{41}(x,y)$ в условие (9), получим соотношение между $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$.

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнении (20) к пределу при $y\to 0$, находим $\omega_{12}(bx)=\tau_1''(x)-\nu_1(x)$.

Далее, записывая решение уравнения (20), удовлетворяющего условиям (11), (14), (17), дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице, получим систему двух интегральных уравнений Вольтера второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$. Решая эту систему, находим функции $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$ тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{11}(bx-ay)$, $\overline{\omega}_{41}(bx-ay)$, $\omega_{42}(bx-ay)$, $u_1(x,y)$, $u_{31}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$.

Так как, функция $u_{41}(x,y)$ известна, то введя обозначение $u_{41}(x,2-x)=h_2(x)$, для нахождения функции $u_{42}(x,y)$ имеем условие $\left.u_{42}(x,y)\right|_{y=2-x}=h_2(x)$. Подставляя формулу решения $u_{42}(x,y)$ в это условие, после некоторых выкладок, находим функцию $\nu_5(y)$. Тогда будет известна и функция $u_{42}(x,y)$. Таким образом, мы определили решение задачи 1 полностью в области G.

Литература.

1. Мамажонов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Научный вестник Наманганского государственного университета. Наманган, 2022, № 2, с. 41-51.
2. Мамажонов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области

с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), 93-103.
3. Mamajonov M., Shermatova H.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 481–489.
4. Мамажонов, М., Шерматова, Х. М., & Мукаддасов, Х. (2014). Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, (1 (8)), 7-13.
5. Mamazhonov, M., & Shermatova, K. M. (2017). On a boundary-value problem for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a concave hexagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 16(1), 11-16.
6. Mamajonov, M., & Shermatova, H. M. (2017). On a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a concave hexagonal region. Vestnik KRAUNTS. Physical and Mathematical Sciences,(1 (17), 14-21.
7. Мамажонов, М., Шерматова, Х. М., & Мухторова, Т. Н. (2021). Об одной краевой задаче для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в вогнутой шестиугольной области. XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции, Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч./сост. ВВ Лепин; Национальная академия наук Беларуси, Институт математики, Белорусский государственный университет.–Минск: Беларуская навука, 2021.–Ч. 1.–с..
8. Mamazhanov, M., & Shermatova, H. M. (2022). On some boundary value problems for a class of third-order equations of parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three lines of type change. Namangan Davlat university and ilmiy ahborotnomashi. Namangan, 41-51.
9. Mamazhanov, M., Shermatova, H. M., & Mamadalieva, H. B. (2017). On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation in a concave hexagonal region. Actual scientific research in the modern world. ISCIENCE. IN. UA, Pereyaslav-Khmelnitsky, (2), 22.

10. Shermatova, K. M. (2020). Investigation of a boundary-value problem for a third order parabolic hyperbolic equation in the form????????+ c??????. Theoretical & Applied Science, (7), 160-165.
11. Mamajonov, M., & Shermatova, X. (2022). Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce, it, engineering and social sciences ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876, 16(5), 117-130.
12. Мамажонов, М. (2023). О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, (1 (2)), 121-133.
13. Шерматова, Х. М. (2017). Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в смешанной пятиугольной областИ. In Актуальные проблемы прикладной математики и физики (pp. 221-223).
14. Джураев, Т. Д., & Мамажанов, М. (1983). О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Дифференциальные уравнения, 19(1), 37-50.
15. Mamazhonov, M., Mamazhonov, S. M., & Mamadalieva, K. B. (2016). Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 13(2), 31-38.
16. Apakov, Y. P., & Mamajonov, S. M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596.