"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 03, ISSUE 07, 2025. JULY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

# SALMAQ FUNKCIYASI $x-\xi$ BOLǴAN SINǴAN SIZIQLAR SEMEYSTVASINDAǴÍ INTEGRAL GEOMETRIYA MÁSELESI

[1]Maksatov S. M., [1]Yusupov M. A., [1]Dilmuratov D. D., [1]Satniyazova I. Q.
[1]Qaraqalpaq mámleketlik universiteti,

**Annotaciya:** Bul maqalada salmaq funkciyası $x-\xi$ bolǵan sınǵan sızıqlar semeystvasındaǵı integral geometriyaniń máselesi kórip shıǵılǵan bolıp, onıń sheshiminiń bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremalar keltirilgen. Sonıń menen birge bunday máseleler kompyuter tomografiyasında qollanılıwı haqqında da aytıp ótilgen.

**Tayanısh sózler:** tomografiya, integral teńleme, sınǵan sızıqlar semeystvası, integral geometriya, salmaq funkciyası.

Salmaq funkciyası $x-\xi$ bolǵan sınǵan sızıqlar semeystvasında integral geometriya máseleleri tomografiya tarawında keń qollanıladı. Tomografiya – bul rentgen nurları yamasa ionlastırıwshı nurlanıwdıń basqa formaları járdeminde denedegi zatlardı súwretlew usılı.

Tomografiya tiykarǵı element túrli jónelisler boylap nurlanıwdıń jutılıw yamasa tarqalıw integralların ólshew nátiyjesinde alınǵan maǵlıwmatlardan obyekttiń ishki strukturaların qayta tiklew bolıp tabıladı. Bul integrallar obyekt arqalı nurlanıw traektoriyaların anıqlaytuǵın sınǵan sızıqlar integrallar retinde ańlatılıwı múmkin.

Mısalı, medicinalıq tomografiya insan ishki aǵzaları yamasa basqa zatlardıń 3D súwretlerin jaratıw ushın kompyuter tomografiya (KT) hám magnit – rezonans tomografiya (MRT) sıyaqlı usıllardan paydalanadı. Eki ólshewli proekciyalar kompleksinen 3D suwretti qayta tiklew procesi anıq kesellikti anıqlaw hám emlew ushın zárúrli bolıp tabıladı.

Salmaq funkciyası $x-\xi$ menen sınǵan sızıqlar semeystvasındaǵı integral geometriya máseleleri tomografiyada súwretti qayta tiklew máselelerinde payda boladı. Bunday jaǵdayda, sınǵan sızıqlar semeystvası obyektti skanerlewde rentgen yamasa basqa túrdegi nurlanıw nurları ótetuǵın jollardı ańlatıwı múmkin. Salmaq

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 03, ISSUE 07, 2025. JULY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

funkciyası $x-\xi$ obyekt materialınıń tıǵızlıǵı yamasa quramı sıyaqlı fizikalıq qásiyetleriniń zárúrli táreplerin sáwlelendiriwi múmkin

**Máseleniń qoyılıwı:** Meyli $f(x,y)$ funkciya $L_H=\{(x,y): x\in Ў, y\in[0,H], H<\infty\}$ kesiminde anıqlanǵan bolsın. Onda tómendegi integral teńleme menen anıqlanǵan $u(x,y)$ funkciyanı tabıw talap etiledi:

$$\int\limits_{\mathrm{U}(x,y)} g(x,\xi)u(\xi,\eta)ds = f(x,y) \tag{1}$$

bul jerde integrallanıw iymekligi

$$\mathrm{U}(x,y)=\{(\xi,\eta): y-\eta=|x-\xi|, 0\le\eta\le y\le H, x\in Ў\}$$

**Teorema 1.** Meyli $f(x,y)$ funkciya barlıq $(x,y)\in L_H$ ushın anıqlanǵan tórt mártte uzliksiz differenciyallanıwshı bolıp, salmaq funkciyası $g(x,\xi)=x-\xi$ kórinisinde berilgen bolsın. Onda (1) másele sheshimin tómendegi inversiya formulası menen anıqlanadı:

$$2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}u(x,y)=\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4}-2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f(x,y) \tag{2}$$

**Dálillew.** Bizge

$$\int\limits_{\mathrm{U}(x,y)} (x-\xi)u(\xi,\eta)ds = f(x,y)$$

kórinisindegi teńleme berilgen. Bul jerde $h=y-\eta$ belgilewin kiritiw arqalı

$$\sqrt{2}\int_0^y h\left[u(x-h,\eta)-u(x+h,\eta)\right]d\eta = f(x,y) \tag{3}$$

teńlikke iye bolamız. (3) teńlikke $x$ ózgeriwshi boyınsha Furye túrlendiriwin qollansaq tómendegige iye bolamız:

$$\sqrt{2}\int_0^y h\hat{u}(\lambda,\eta)\left(e^{-i\lambda h}-e^{i\lambda h}\right)d\eta = \hat{f}(\lambda,y) \tag{4}$$

bul jerde $\hat{f}(\lambda,y)=-\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ – $f(x,y)$ funkciyasınıń $x$ ózgeriwshi boyınsha Furye túrlendiriwi.

Endi (4) teńlikke $y$ ózgeriwshisi boyınsha Laplas túrlendiriwin qollasaq:

$$-2\sqrt{2}i\int_0^\infty e^{-px}\int_0^y (y-\eta)\hat{\tilde{u}}(\lambda,\eta)\sin\lambda(y-\eta)\,d\eta dy=\int_0^\infty e^{-py}\tilde{f}(\lambda,y)dy$$

$y-\eta=t$

$$-2\sqrt{2}i\int_0^\infty e^{-p\eta}\int_0^y \hat{\tilde{u}}(\lambda,\eta)e^{-pt}t\sin\lambda t\,d\eta dy=\int_0^\infty e^{-py}\tilde{f}(\lambda,y)dy \tag{5}$$

Endi biz (5) teńlikte $\varphi(\lambda,p)=\int_0^\infty e^{-py}\tilde{f}(\lambda,y)dy$ dep belgilesek hám integrallaw tártibin ózgertiw arqalı

$$-2\sqrt{2}i\hat{\tilde{u}}(\lambda,p)J(\lambda,p)=\varphi(\lambda,p) \tag{6}$$

teńlemege iye bolamız. Bul jerde $J(\lambda,p)=\int_0^\infty e^{-pt}t\sin\lambda t dt$. Bul ańlatpa mánisi:

$$J(\lambda,p)=\frac{2p\lambda}{\left(\lambda^2+p^2\right)^2} \tag{7}$$

Demek, (6) teńleme

$$-4\sqrt{2}ip\lambda\hat{\tilde{u}}(\lambda,p)=\left(\lambda^2+p^2\right)^2\varphi(\lambda,p)$$

kóriniske keledi, keyin $p$ ózgeriwshi boyınsha keri Laplas, $\lambda$ ózgeriwshi boyınsha keri Furye túrlendiriwlerin orınlap,

$$2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}u(x,y)=\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4}-2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f(x,y).\square$$

**Teorema 2.** $f(x,y)$ funkciya barlıq $(x,y)\in L_H$ anıqlanǵan bolıp tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $f(x,y)$ funkciya $x$ argumenti boyınsha finitni;
2) $f(x,y)$ ekinshi tártipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye;
3) $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{y=H}=0$.

Onda (2) formula járdeminde anıqlanǵan $x$ argumenti boyınsha finitni, eki márte úzliksiz differenciyallanıwshı funkciyalar klasında (1) másele sheshimge iye.

“JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN” JURNALI
VOLUME 03, ISSUE 07, 2025. JULY
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

**Dálillew.** Ekinshi teoremadaǵı $f(x,y)$ funkciyaǵa qoyılǵan shártler boyınsha (2) ge $x$ ózgeriwshisi boyınsha Furye túrlendiriwin hám $y$ ózgeriwshisine Laplas túrlendiriwin qollaw múmkin. Demek, Furye hám Laplas túrlendiriwleriniń qásiyetlerinen paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$-4\sqrt{2}ip\lambda\tilde{\hat{u}}(\lambda,p)=\left(\lambda^2+p^2\right)^2\varphi(\lambda,p)$$

yamasa

$$\varphi(\lambda,p)=-4\sqrt{2}ip\lambda\frac{\tilde{\hat{u}}(\lambda,p)}{\left(\lambda^2+p^2\right)^2}.$$

(7) formulaǵa bola

$$\varphi(\lambda,p)=-2\sqrt{2}iJ(\lambda,p)\tilde{\hat{u}}(\lambda,p) \tag{8}$$

bunda $J(\lambda,p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}t\sin\lambda t dt$.

(8) ge $p$ ózgeriwshisine qarata keri Laplas túrlendiriwin qollaw nátiyjesinde biz tómendegige iye bolamız:

$$\hat{f}(\lambda,y)=\sqrt{2}\int\limits_0^y h\hat{u}(\lambda,\eta)\left(e^{-i\lambda h}-e^{i\lambda h}\right)d\eta \tag{9}$$

Bunda $\hat{f}(\lambda,y)=-\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ ekenligin bilgen halda (9) teńlikti tómendegishe qayta jazamız:

$$-\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\sqrt{2}\int\limits_0^y h\hat{u}(\lambda,\eta)\left(e^{-i\lambda h}-e^{i\lambda h}\right)d\eta \tag{10}$$

Endi aqırǵı (10) teńliktiń eki tárepine de $\lambda$ ózgeriwshisi boyınsha keri Furye túrlendiriwin qollawımız nátiyjesinde joqarıdaǵı (2) teńlikti tómendegi kóriniske alıp kelemiz:

$$f(x,y)=\sqrt{2}\int\limits_0^y h\left[u(x-h,\eta)-u(x+h,\eta)\right]d\eta. \square$$

## Ádebiyatlar

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М. : Наука, 1980. 286 с.

2. Deans S. R. The Radon transform and some of its applications. – Courier Corporation, 2007.

3. A.H.Begmatov, A.O.Pirimbetov, A.K.Seidullaev, "Weakly ill-posed problems of integral geometry witch perturbation on polygonal lines",Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., **15**:1 (2015), 5–12

4. Akb. H. Begmatov, A.O. Pirimbetov, A.K. Seidullaev, "Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography", Proceedings of IFOST-2012. IEEE, Tomsk, Vol.\,II, P. 261-266.

5. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Zadachi integral'noi geometrii v polose na semeistvakh parabolicheskikh krivykh [Problems of integral geometry in a strip on families of parabolic curves]. Doklady AN VSh RF [Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences], 2012, vol. 2 (19), pp. 6–15 (in Russian).