

MONJ TEOREMASINING FAZOVIY SHAKLLAR YORDAMIDAGI ISBOTI

Rasul Qo‘shnazarov

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti matematika
mutaxassisligi magistranti.

Annotatsiya: Ushbu maqolada tekislikdagi uchta aylanaga jufti-jufti bilan olinib o‘tkazilgan urinmalar kesishgan uchta nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqda yotishi haqidagi Monj teoremasini fazoviy shakllar yordamida isbotlaymiz va bu natijani ixtiyoriy uchta tashqi gomotetik shakllar uchun umumlashtiramiz.

Kalit so‘zlar: Gomotetiya markazi, tekislik, shar, konus, to‘g‘ri chiziq.

Аннотация: В данной статье мы докажем теорему Монжа о том, что три точки пересечения попарно проведенных касательных к трем окружностям на плоскости лежат на одной прямой, используя пространственные фигуры, и обобщим этот результат для любых трех внешних гомотетических фигур.

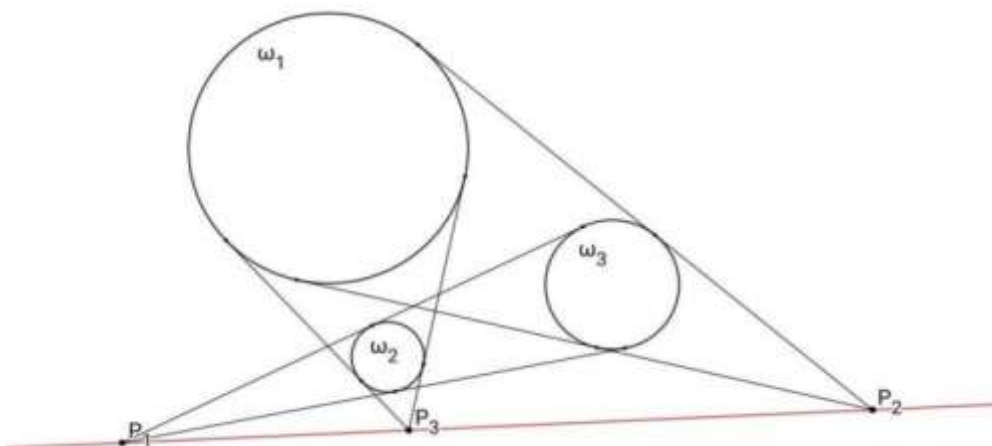
Ключевые слова: Центр гомотетии, плоскость, шар, конус, прямая линия.

Annotation: In this article, we prove Monge's theorem, which states that the three intersection points of tangents drawn pairwise to three circles in a plane lie on a straight line, using three dimensional space. We then generalize this result for any three externally homothetic figures.

Keywords: center of homotety, plane, sphere, cone, straight line.

Quyida keltiriladigan fransuz matematigi Gaspard Monj nomiga atalgan Monj teoremasi olimpiadachilarga yaxshi tanish bo‘lib maktab o‘quvchilari orasidagi ko‘pgina xalqaro olimpiada masalalarini yechishda qo‘llanilib kelinadi.

Teorema (Monj teoremasi). Tekislikda radiuslari o‘zaro farqli hamda biri boshqasining ichida to‘liq joylashmaydigan $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aylanalar berilgan bo‘lib, P_1 nuqta ω_2 va ω_3 , P_2 nuqta ω_1 va ω_3 , P_3 nuqta esa ω_1 va ω_2 aylanalarning tashqi urinmalari kesishgan nuqtalar deylik. U holda P_1, P_2 va P_3 nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi.



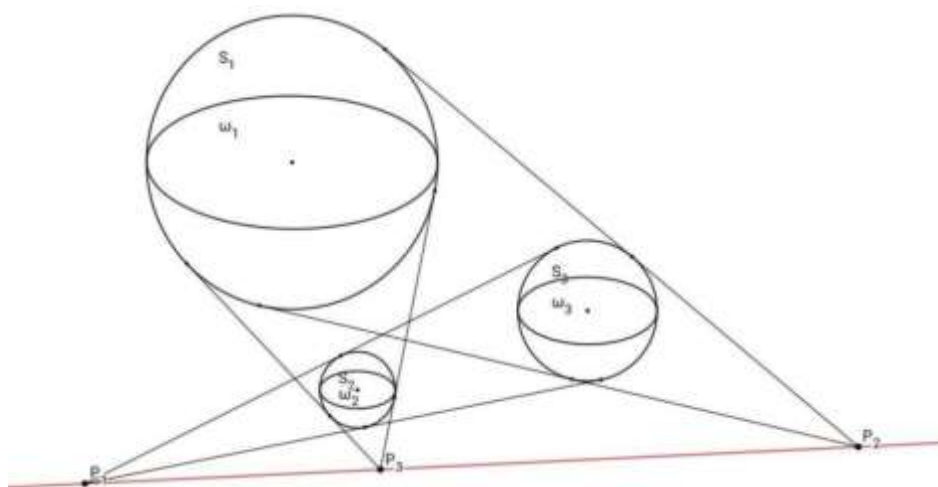
1-rasm

Isbot. Bu teoremaning bir qancha isbotlari mavjud bo‘lib, ulardan ba‘zilari qo‘shimcha teoremlarda, masalan Menelay yoki Dezarg teoremlaridan foydalanishni talab qiladi. Lekin ushbu masalaning fazodagi analogini qarasaq, Monj teoremasi nuqta va tekisliklarning oddiy xossalaridan kelib chiqadigan natija bo‘lib qoladi! Teorema isbotiga ikki xil usulda yondashamiz: sharlar yordamida va konuslar yordamida.

Birinchi yondashuv. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aylanalarni mos ravishda S_1, S_2, S_3 sferalarning ekvator aylanasi sifatida qaraylik. U holda P_1, P_2, P_3 nuqtalar mos ravishda S_2 va S_3, S_1 va S_3, S_1 va S_2 sferalarga o‘tkazilgan tashqi urinmalarning ham kesishish nuqtasi bo‘lib qoladi. Haqiqatdan ham, ma‘lumki radiuslari turli bo‘lgan ikki sferaning barcha tashqi urinmalari to‘plami konus hosil qiladi. Bu konusning uchi sferalar uchun tashqi gomotetiya markazi (o‘xshashlik markazi) bo‘lgani uchun, bir tekislikda yotuvchi ekvator aylanalarining tashqi urinmalari konusning yasovchilari bo‘ladi. Demak bu yasovchilar kesishadigan P_1, P_2, P_3 nuqtalar jufti-jufti bilan olingan sferalarning tashqi o‘xshashlik markazlari ham bo‘ladi.

Research Science and
Innovation House





2-rasm

Demak, quyidagicha xulosa qilsak bo‘ladi. Fazoda berilgan uchta sferadan jufti-jufti bilan olinib tashqi urinma konuslari o‘tkazilsa, bu konuslarning uchlari bir to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘rsatsak, bu sferalar va urinmalarni sferalarning ularning markazlaridan o‘tuvchi tekislikdagi qismini qarash natijasida Monj teoremasi kelib chiqadi.

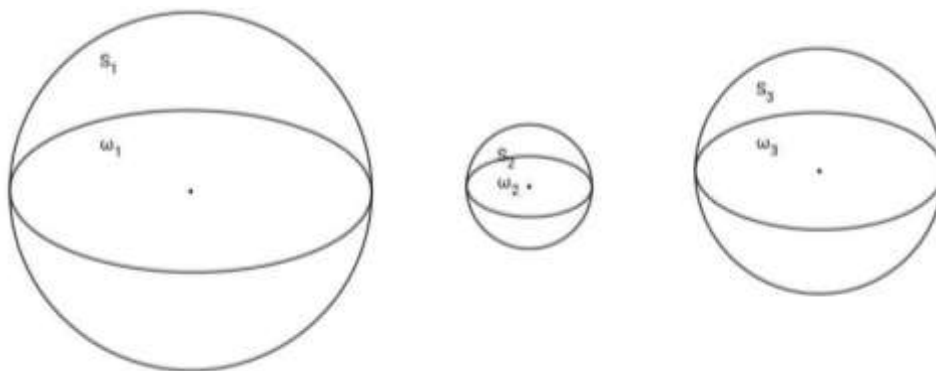
Keling, ushbu sferalar yordamidagi yondashuvda, uchta sferaga ham urinuvchi tekislik mavjud bo‘lsin deb qaraylik. Ravshanki bu holda teoremani biroz xususiy holda isbotlagan bo‘lamiz, lekin bu albatta isbotni keyinchalik konuslar yordamida to‘ldirib ketamiz.

Berilgan S_1 , S_2 va S_3 sferalarning uchalasiga ham urinuvchi Π tekislik o‘tkazamiz. Bu Π tekislik bir vaqtda S_1 va S_2 sferaga uringani uchun, S_1 va S_2 ga tashqi urinuvchi konusga ham yasovchisi bo‘ylab urinadi. Bundan bu konusning uchi, ya‘ni S_1 va S_2 sferalarning o‘xshashlik markazi P_3 nuqtaning Π tekislikka tegishli bo‘lishi kelib chiqadi. Ayni paytda esa P_3 nuqta ω_1 , ω_2 , ω_3 aylanalar yotgan tekislikda ham yotgani uchun, u Π va berilgan aylanalar yotgan tekislik kesishmasiga ham tegishli bo‘ladi. Xuddi shu mulohazani S_1 , S_3 va S_2 , S_3 sferalar uchun ham yuritib, P_2 va P_1 nuqtalar ham yuqoridagi ikkita tekislik kesishmasida yotishini bilib olamiz. Stereometriya kursidan ma‘lumki parallel bo‘lmagan ikkita tekisli to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. ω_1 , ω_2 , ω_3 aylanalarning radiuslari turlicha bo‘lgani uchun Π tekislik ular yotgan tekislikka parallel bo‘la olmaydi. Demak P_1 ,

P_2 va P_3 nuqtalar ushbu ikkita tekislik kesishmasi bo‘lgan to‘g‘ri chiziqda joylashar ekan.



Yuqorida aytganimizdek S_1, S_2, S_3 sferalar umumiy urinmaga ega bo'lsin deb, isbotni biroz xususiy hol uchun berdik. Aslida bu uchta sfera umumiy urinmaga ega bo'la olmagan holda ham Monj teoremasi o'rinli bo'ladi



3-rasm

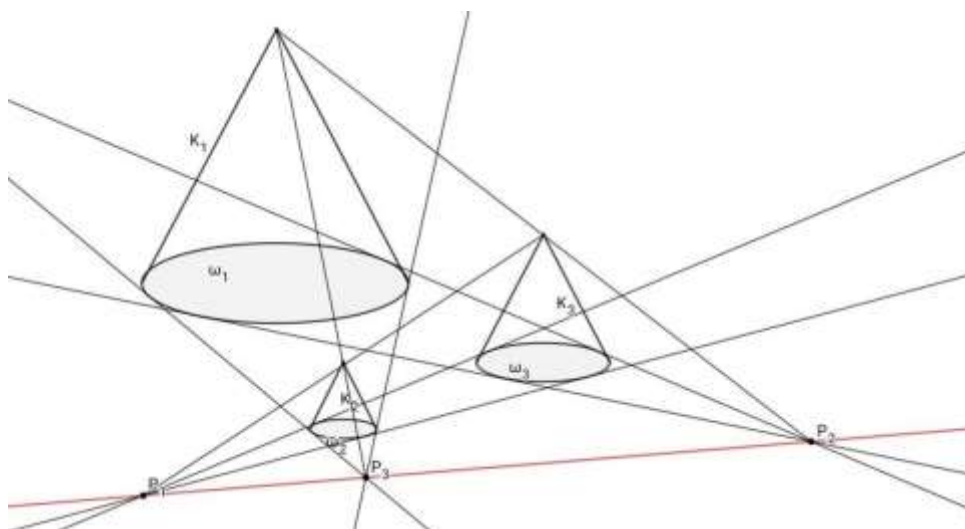
Masalan 3-rasmdagidek sferalarning uchallasiga ham urinadigan tekislik o'tkazib bo'lmaydi, lekin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aylanalar uchun Monj teoremasi o'rinli.

Aylananing fazodagi analogi sfera bo'lganligi uchun dastlab birinchi yondashuv xayolga kelishi ta'biy edi. Lekin ko'rdikki, sferalarga bizga isbotda kerak bo'lgan asosiy tekislik: umumiy urinma tekisligini har doim ham o'tkazib bo'lmaz ekan. Ammo sfera o'rniga asoslari mos ravishda berilgan $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aylanalardan iborat bo'lgan K_1, K_2, K_3 konuslarni qarashakchi.

Ikkinchi yondashuv. Endi asoslari bir tekislikda yotuvchi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aylanalardan iborat konuslarning balandliklari nisbatini mos asoslari radiuslarining nisbatlaricha qilib, aniqrog'i bu K_1, K_2, K_3 konuslarni o'zaro o'xshash bo'ladigan qilib olaylik.

Research Science and
Innovation House





4-rasm

Konusning afzallik tomoni shundaki, 3 ta konusga, ular qanday joylashishidan qat’iy nazar ularning uchlaridan o‘tuvchi tekislik har doim mavjud bo‘ladi. K_1 , K_2 , K_3 konuslarning uchlari orqali o‘tuvchi tekislikni Π bilan belgilaylik. K_1 va K_2 konuslar tuzib olishimizga ko‘ra o‘xshash bo‘lgani uchun ularning o‘xshashlik markazi asoslari ω_1 va ω_2 aylanalarning o‘xshashlik markazi bo‘lgan P_3 nuqta bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli bu konuslarning uchlari orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq P_3 nuqtadan o‘tadi. Bundan tashqari Π tekislik K_1 va K_2 ning uchlaridan o‘tgani uchun, bu uchlar orqali o‘tadigan to‘g‘ri chiziq Π da yotadi. Demak P_3 nuqta ushbu to‘g‘ri chiziqqa va bundan Π tekislikka ham tegishliligi kelib chiqadi. Xuddi shunday mulohazani K_2 va K_3 , K_1 va K_3 konuslar uchun yuritib, $P_1 \in \Pi$ va $P_2 \in \Pi$ ekanligini ham topamiz. Boshqa tomondan P_1, P_2, P_3 lar ω_1, ω_2 va ω_3 aylanalarda yotgan tekislikda joylashgan edi, shu sababli bu nuqtalar ushbu tekislik va Π tekislikning kesishmasidan iborat bo‘lgan to‘g‘ri chiziqda yotishi kelib chiqadi. Demak teorema to‘liq isbotlandi.

1-Izoh. Aslida Monj teoremasida keltirilgan aylanalardan biri ikkinchisining ichida joylashib qolganda ham o‘rinli bo‘ladi, chunki bunday aylanalarga umumiy tashqi urinma o‘tkazib bo‘lmagani bilan, ular har doim tashqi o‘xshashlik markaziga ega bo‘laveradi va bu o‘xshashlik markazi urinmalar kesishgan nuqta vazifasini bajarib keladi. Biz keltirgan isbotda ham aslida tashqi urinmalar kesishgan nuqta o‘rniga, yanada umumiyroq bo‘lgan tashqi o‘xshashlik markazidan foydalanilgan.



2-Izoh. Ushbu isbot usuli yordamida nafaqat tekislikdagi uchta aylana, balki ixtiyoriy bir biriga uchta tashqi gomotetik shakllarning ham tashqi gomotetiya markazlari bir to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘rsatsa bo‘ladi. Bunda konus o‘rniga asosi berigan shakldan iborat bo‘lgan o‘zaro o‘xshash piramidasimon jismlarni qarash yetarli bo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. A. Y. Narmanov. Analitik geometriya // O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. Toshkent 2008.
2. Graham, L. A. Ingenious Mathematical Problems and Methods. New York: Dover. (1959).
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Monge's_theorem

Research Science and Innovation House