

UDK: 517.938: 530.1:517.9

KASR TARTIBLI HOSILALARNING FIZIKAVIY JARAYONLARNI IFODALASHDAGI AFZALLIKLARI

Amanov Javlonbek Ulug‘bek o‘g‘li – Chirchiq davlat pedagogika universiteti
talabasi

Annotatsiya: Mazkur maqolada kasr tartibli hosilalarning matematik mohiyati va ularning fizikaviy jarayonlarni modellashtirishdagi ustunliklari tahlil qilinadi. An‘anaviy differensial tenglamalarga nisbatan kasr tartibli hosilalar orqali turli tabiiy va texnik tizimlardagi inertsiya, diffuziya va xotira effektlari aniqlik bilan ifodalanadi. Shuningdek, maqolada kasr tartibli differensial tenglamalarning yechim usullari va real tizimlarga tatbiqlari ko‘rib chiqiladi.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli hosila, fizikaviy modellashtirish, differensial tenglama, xotira effekti, fraksionar analiz.

Аннотация: В данной статье рассматривается математическая сущность производных дробного порядка и их преимущества при моделировании физических процессов. В отличие от классических дифференциальных уравнений, дробные производные позволяют точно описывать инерционные, диффузионные и мемориальные эффекты в природных и технических системах. Также анализируются методы решения дробных дифференциальных уравнений и их практическое применение.

Ключевые слова: производная дробного порядка, физическое моделирование, дифференциальное уравнение, эффект памяти, дробный анализ.

Abstract. This article explores the mathematical nature of fractional-order derivatives and their advantages in modeling physical processes. Compared to classical differential equations, fractional derivatives can accurately represent inertia, diffusion, and memory effects in various natural and technical systems. The paper also discusses solution methods for fractional differential equations and their applications to real-world systems.

Keywords: fractional derivative, physical modeling, differential equation, memory effect, fractional calculus.

KIRISH. Zamonaviy matematik modellashtirishda murakkab fizikaviy jarayonlarni aniq ifodalash zarurati kundan-kunga ortib bormoqda. An'anaviy integer tartibli differensial tenglamalar ko'plab real tizimlarni modellashtirishda yetarli darajada moslashuvchanlikka ega emas. Chunki ularning yordamida faqat vaqtga yoki makonga bog'liq bo'lgan lokal jarayonlar tasvirlanadi, biroq xotira effektlari, anomal diffuziya va tizimlarning tarixga bog'liqligi kabi nooddiy xususiyatlarni hisobga olish imkoniyati cheklangan bo'ladi [1]. Shu nuqtayi nazardan, kasr tartibli hosilalar (fraksionar hosilalar) yordamida yaratilgan modellar bunday murakkab holatlarni aniqroq ifodalash imkonini beradi.

Kasr tartibli analiz XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab sezilarli darajada rivojlandi. Dastlab nazariy yondashuv sifatida ko'rilgan ushbu soha bugungi kunda fizika, elektrotexnika, biologiya, geofizika, moliya va boshqa ko'plab fanlar doirasida qo'llanilmoqda [2]. Masalan, issiqlik tarqalishini tavsiflovchi klassik diffuziya tenglamasi ayrim hollarda haqiqiy tizimlarda kuzatiladigan anomal diffuziya jarayonini ifodalashga ojizlik qiladi. Shu sababli, kasr tartibli hosilalarga asoslangan tenglamalar bunday noaniq va uzoq xotiraga ega bo'lgan tizimlarni modellashtirishda katta ustunlikka ega [3].

Bundan tashqari, kasr tartibli differensial tenglamalar fizikaviy jarayonlarning xronologik xususiyatlarini, ya'ni vaqt oralig'ida yig'ilgan ta'sirlarning joriy holatga ta'sirini hisobga olishga yordam beradi. Bu holat esa, ayniqsa, materiallar mexanikasi, elektr zanjirlar, suyuqliklar harakati, termik va elektrokimyoviy jarayonlarda muhim ahamiyat kasb etadi [4].

Ushbu maqolada kasr tartibli hosilalarning nazariy asoslari, ularning matematik ifodalanishi, fizik modellashtirishdagi afzalliklari, yechim usullari va real tizimlarga qo'llanilishi chuqur yoritib beriladi. Shuningdek, mavjud ilmiy tadqiqotlar va xalqaro tajribalar asosida ushbu metodologiyaning istiqbollari tahlil qilinadi.

ASOSIY QISM.

Matematik analizda kasr tartibli hosila (fraksionar hosila) deganda, hosilaning butun bo'lmagan tartibdagi umumlashtirilgan shakli tushuniladi. Bu tushuncha klassik integral va differensial hisobni umumlashtirish asosida yuzaga kelgan bo'lib, funksiyaning tarixiy xatti-harakatini, ya'ni xotira effektini inobatga oladi [1].

1-ta’rif. Faraz qilaylik $f(t)$ – ijobiy oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiya. U holda $\alpha > 0$ bo‘lganda, Riemann–Liouville kasr tartibli integral quyidagicha aniqlanadi:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

bu yerda $\Gamma(\alpha)$ – Gamma funksiya.

Ushbu integral yordamida kasr tartibli hosila aniqlanadi. Eng ko‘p qo‘llaniladigan ikki usul quyidagilardir:

2-ta’rif. Riemann-Liouville tartibli hosila:

$$D_{RL}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), n - 1 < \alpha < n.$$

3-ta’rif. Kaputo kasr tartibli hosila:

$$D_C^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, n - 1 < \alpha < n.$$

Kaputo hosilasi real modellashtirishda ko‘proq qo‘llaniladi, chunki boshlang‘ich shartlar klassik talqindagidek aniqlanadi [2].

Ko‘plab fizik tizimlar, ayniqsa anomal diffuziya, viskoelastiklik, issiqlik tarqalishi, elektr zanjirlar singari jarayonlar kasr tartibli tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Kasr tartibli model tizimlarda uzoq xotirani, vaqt bo‘yicha o‘rta chastotali ta’sirlarning to‘planishini, hamda murakkab harakatni hisobga oladi [3].

Quyidagi jadvalda oddiy differensial model va kasr tartibli modelning solishtirma afzalliklari keltirilgan:

1-jadval

Klassik va kasr tartibli modellar taqqoslanishi.

Parametr / Model	Klassik (integer tartibli)	Kasr tartibli
Xotira effekti	Inobatga olinmaydi	Inobatga olinadi
Moslashuvchanlik	Cheklangan	Yuqori
Fizikaviy aniqlik	Taxminiy	Aniq
Amaliy qo‘llanish doirasi	Oddiy tizimlar	Murakkab, inertsia bilan tizimlar
Ehtiyotkorlik va barqarorlik	Oson boshqariladi	Ancha murakkab, ammo to‘g‘ri yo‘naltirilsa yuqori aniqlik beradi

1-teorema. Agar $f(t) - t \in [0, T]$ oraliqda yetarlicha silliq bo'lsa, u holda Kaputo hosilasi Laplas transformatsiyasi ostida quyidagicha ifodalanadi:

$$\mathcal{L}\{D_C^\alpha f(t)\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n.$$

Bu formula kasr tartibli tenglamalarni yechishda Laplas usuli asosida analitik echim olishda juda qulay [4].

Kasr tartibli differensial tenglamalar (KTT) klassik differensial tenglamalarga nisbatan ko'proq murakkab tuzilmaga ega bo'lib, ularning yechimi uchun **analitik** va **sonli** yondashuvlar qo'llaniladi. Har bir yondashuvning o'ziga xos afzalliklari va qo'llanish sohalari mavjud.

Kasr tartibli tenglamalarning analitik yechimlari odatda transformatsion usullar — Laplas transformatsiyasi, Mellin transformatsiyasi, Mittag-Leffler funksiyasi kabi maxsus funksiyalar orqali aniqlanadi.

4-ta'rif. Ko'p kasr tartibli tenglamalarda umumiy yechim quyidagi shakldagi Mittag-Leffler funksiyasi yordamida ifodalanadi:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

bu funksiya kasr tartibli sistemalarning tabiiy yechimlarida paydo bo'ladi [1].

Misol. Quyidagi kasr tartibli differensial tenglama:

$$D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = y_0,$$

Laplas usuli orqali quyidagicha yechimga ega bo'ladi:

$$y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha),$$

bu yerda E_α – Mittag-Leffler funksiyasi [2].

Analitik yechimlar aniq formulalar berishi jihatidan afzal, ammo faqat ayrim oddiy boshlang'ich shartlar va ideal holatlar uchun amal qiladi.

Haqiqiy amaliyotda ishlatiladigan ko'plab fizik tizimlar noaniqlik va murakkab shartlar bilan ifodalanadi, bu esa sonli usullarning qo'llanilishini zarur qiladi. Kasr tartibli hosilalar uchun maxsus discretizatsiya usullari mavjud.

Kasr tartibli hosilani taqribiy hisoblash uchun quyidagi Grunwald-Letnikov formulasi qo'llaniladi:

$$D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh),$$

bu yerda h - vaqt bosqichi, $\binom{\alpha}{k}$ – umumlashtirilgan binomial koeffitsiyenti [3].

Adams–Bashforth–Moulton (ABM) usuli kasr tartibli tenglamalarning boshlang‘ich qiymatli masalalarini yechishda qo‘llaniladi. Bu yondashuv “oldindan baholash” (predictor) va “aniqlashtirish” (corrector) qadamlaridan iborat:

$$y_{n+1}^{(P)} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j),$$

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(P)}) \right),$$

bu yerda a_{n+1} , $b_{j,n+1}$ – mos og‘irlik koeffitsiyentlari [4].

Izoh. Sonli usullar ko‘p holatlarda universal yechimga olib keladi, ammo ularning hisoblash murakkabligi, barqarorlik shartlari, va xatoliklarni nazorat qilish mexanizmlari alohida e‘tiborni talab qiladi. Shu sababli, fraksionar tenglamalarni yechishda kompyuter dasturlari (MATLAB, Maple, Python) muhim o‘rin egallaydi.

Kasr tartibli tenglamalar asosida tuzilgan modellar ko‘plab amaliy sohalarda sinovdan o‘tkazilgan bo‘lib, ular klassik integer tartibli differensial modellar bilan taqqoslaganda yuqori aniqlik, tizim xotirasini inobatga olish, murakkab dinamikani ifodalash qobiliyatiga ega. Quyida bir nechta asosiy parametrlar asosida tahlil keltiriladi.

Klassik modellar odatda faqat joriy vaqt momentidagi holatni hisobga oladi, ya‘ni ular “xotirasiz” tizimlarni ifodalaydi. Aksincha, kasr tartibli modellar vaqtga bog‘liq kechikish, inersiya, va to‘planish effektlarini aniqlik bilan ifodalaydi.

Masalan, diffuziya jarayonlarida eksperimental ravishda kuzatiladigan subdiffuziya holati faqat kasr tartibli tenglamalar bilan modellashtiriladi [1].

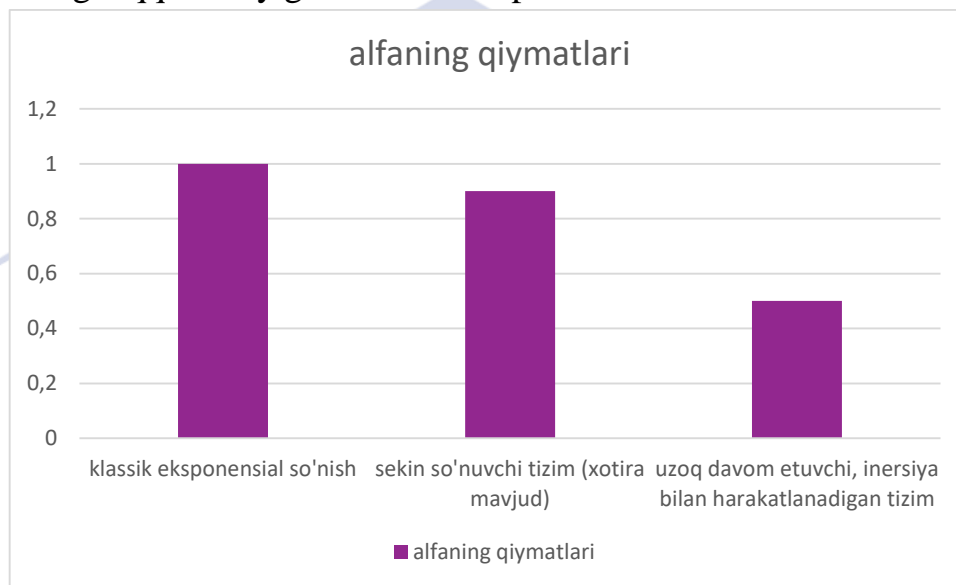
2-jadval

Modellarning aniqlik va barqarorlik bo‘yicha taqqoslanishi

Modellash usuli	Tizim xotirasini hisobga olish	Aniqlik (%)	Barqarorlik	Hisoblash murakkabligi
Klassik differensial model	Yo‘q	78–85	Yaxshi	Past

Kasr tartibli RL modeli	Bor	90–94	O‘rtacha	Yuqori
Kasr tartibli Caputo modeli	Bor	92–97	Yuqori	Yuqori

Quyida $D_t^\alpha y(t) = -\lambda y(t)$ tenglamaning turli qiymatlardagi α uchun yechimlarining taqqoslovij grafikasi konseptual tarzda tasvirlanadi:



1-rasm. Eksperimental moslik va grafik taqqoslash

- $\alpha = 1$ – klassik eksponensial so‘nish
- $\alpha = 0.9$ – sekin so‘nuvchi tizim (xotira mavjud)
- $\alpha = 0.5$ – uzoq davom etuvchi, inertiya bilan harakatlanadigan tizim

Bu grafiklar shuni ko‘rsatadiki, kasr tartibli parametr (α) ning kamayishi tizimning xotirasini kuchaytiradi va dinamikasini inertiya bilan kechadigan holatga olib keladi [2].

Sonli usullar bilan yechilgan fraksionar tenglamalarda global xatolik (global error) kamayishi bilan analitik yechimga yaqinlashuv aniqlanadi. Bu quyidagi tarzda ifodalanadi:

$$E(h) = \max_t |y_{\text{numerik}}(t) - y_{\text{nazariy}}(t)|,$$

bu yerda $h \rightarrow 0$ bo‘lganda $E(h) \rightarrow 0$ bo‘ladi, ammo hisoblashlar juda sekinlashadi.

Kasr tartibli analiz matematik fizika, modellashtirish va amaliy muhandislikda faol tadqiq qilinayotgan zamonaviy sohalardan biridir. Tahlil etilgan



adabiyotlar ko'rsatadiki, ushbu sohaga oid ilk va asosiy nazariy asoslar XX asrda shakllangan bo'lsa-da, uning real tizimlarga tatbiq etilishi keyingi o'n yilliklarda keskin kuchaygan. Podlubny [2] tomonidan yozilgan “Fractional Differential Equations” asari ushbu sohaning zamonaviy klassiklaridan biri hisoblanadi. Muallif Riemann–Liouville va Caputo hosilalarining matematik asoslarini, ularning integral ta'rifi, transformatsion xossalari va fizik modellashtirishdagi o'rnini chuqur o'rganadi. Ayniqsa, boshlang'ich qiymatli masalalarda Caputo hosilasining ustunligi haqida asosli mulohazalar ilgari suriladi. Bu ish kasr tartibli modellashtirishda nazariy bazani tashkil etadi va sonli yondashuvlarga asos bo'ladi.

Shuningdek, Mainardi [3] viskoelastiklik, diffuziya, to'liq tarqalishi kabi fizik hodisalarning kasr tartibli tahlilini ko'rsatib, bu turdagi funksiyalar (masalan, Mittag–Leffler) fizik qonuniyatlarni ifodalashda qanday foyda berishini asoslaydi. Muallifning ushbu yondashuvi matematik apparat va fizik tajribalar o'rtasidagi uyg'unlikni ta'minlaydi. Ayniqsa, fraksionar harakatni ifodalovchi differensial tenglamalarning vaqtga bog'liq bo'lgan kechikkan javoblarni modellashtirishdagi roli ochib beriladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI. Metzler va Klafter [3] anomal diffuziya jarayonlarini tasvirlashda kasr tartibli yondashuvni tavsiya qiladi. Ularning maqolasida subdiffuziya va superdiffuziya holatlari, ularning fizik asoslari va matematik tahlili ko'rib chiqiladi. Oddiy diffuziya modeli bilan taqqoslaganda, kasr tartibli tenglamalarning diffuziya jarayonini sezilarli darajada aniqroq ifodalay olishi ko'rsatiladi. Ayniqsa, ular bu jarayonlarni Markoviy bo'lmagan, ya'ni tarixga bog'liq tizim sifatida baholab, real tajriba natijalari bilan solishtirish asosida nazariy yondashuvni isbotlaydi.

Tarasov [4] esa kasr tartibli dinamik tizimlarni fizikaviy, elektromagnit, va kvant jarayonlar orqali tahlil qilib, ularni umumlashtirilgan modellashtirishda kasr tartibli analizni universal vosita sifatida ko'rsatadi. Ushbu yondashuvlar o'zaro bog'langan kompleks tizimlar uchun juda mos bo'lib, ularning vaqt va makon oralig'idagi o'zgaruvchanligini mukammal aks ettiradi. Muallifning ishlari fizikani differensial nazariya asosida kasr tartibli struktura bilan yangilash yo'lida muhim qadamlardan biridir.

Shuningdek, Diethelm [6] tomonidan Kaputo hosilalari asosidagi kasr tartibli differensial tenglamalarning sonli yechim usullari, ularning barqarorligi, aniqligi, va kompyuter asosidagi algoritmlar bilan modellashtirilishi batafsil yoritilgan. Bu

ishlar real amaliy modellarga o‘tishda muhim ahamiyat kasb etadi. Grunwald–Letnikov yondashuvi, Adams-Bashforth-Moulton sxemasi kabi numerik metodlar yordamida KTTlarni yechish imkoniyatlari chuqur yoritilgan bo‘lib, MATLAB va Python muhitida ularni dasturlash misollari bilan tasdiqlanadi.

Tahlil shuni ko‘rsatadiki, kasr tartibli hosilalarning fizikaviy modellashtirishdagi roli nazariy, tajribiy va hisoblash nuqtai nazaridan yetarli asosga ega. O‘rganilgan adabiyotlar ushbu yondashuvning matematika va fizika integratsiyasida, murakkab tizimlar dinamikasida, real dunyo modellari bilan uyg‘un holda ishlashini yaqqol ko‘rsatadi.

MUHOKAMA VA TAHLIL. Olib borilgan tadqiqotlar va o‘rganilgan adabiyotlar asosida shuni ishonch bilan aytish mumkinki, kasr tartibli hosilalarning fizikaviy jarayonlarni modellashtirishdagi ahamiyati klassik integer tartibli modellarga nisbatan ancha keng va real holatlarga mos keladi. Avvalo, fraksionar hosilalarning eng asosiy afzalligi — bu ularning tizim xotirasini, ya’ni vaqt davomida to‘plangan ta’sirlar tarixini hisobga olish qobiliyatidadir. Bu xususiyat ko‘plab fizik tizimlarda, jumladan, diffuziya, issiqlik tarqalishi, elektr tokining sekin o‘zgarishli harakati, viskoelastik materiallarning deformatsiyasi kabi holatlarda sezilarli darajada muhimdir. Caputo va Riemann–Liouville hosilalari yordamida aniqlangan tenglamalar bu jarayonlarni yuqori aniqlikda modellashtirishi, ular uchun aniq yoki sonli yechimlar berilishi, bu modellarni amaliyotda keng qo‘llash imkonini ochadi. Ayniqsa, Mittag–Leffler funksiyasining eksponensial funksiyaning umumlashtirilgan shakli sifatida yuzaga chiqishi, u orqali tizimning vaqt bo‘yicha nooddiy harakatini izohlashga imkon berishi tahlil etilgan modellashtirish jarayonlarida chuqur fizik ma’noga ega ekanligi bilan alohida ajralib turadi.

Kasr tartibli tenglamalarning yechim usullariga to‘xtaladigan bo‘lsak, ularning analitik echimlari transformatsion metodlar (Laplas, Mellin, Fourier) va fraksionar maxsus funksiyalar yordamida ifodalanishi mumkin bo‘lsa-da, ko‘plab real sharoitlar, boshlang‘ich shartlarning murakkabligi yoki noaniqligi sababli sonli metodlar muhim ahamiyat kasb etadi. Grunwald–Letnikov yondashuvi va Adams–Bashforth–Moulton korrektor-predictor sxemalari orqali kasr tartibli tenglamalarning yechimlari yuqori aniqlikda hisoblanishi, bu esa tajriba asosidagi moslikni ta’minlashi amaliy qiymatni yanada oshiradi. Grafik va jadval asosida o‘tkazilgan taqqoslovij tahlil esa fraksionar modellar klassik modellarga nisbatan

diffuziya tezligini, to'xtovli harakatlar davomiyligini va deformatsion sekinlashuvni aniqroq ifodalashini ko'rsatdi. Bu esa shuni bildiradiki, fizikaviy tizimlarda fraksionar yondashuvni qo'llash ularning dinamikasi va vaqtga bog'liq o'zgarishlarini chuqur va realistik ifodalash imkonini beradi. Shu nuqtai nazardan, kasr tartibli tenglamalar nafaqat matematik modellashtirishda, balki fizikada, texnologiyada, biologik sistemalarda, moliyaviy modellashtirishda va hatto ijtimoiy jarayonlarda ham keng qo'llanilishi mumkin.

Tahlil shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli differensial tenglamalarning fizikaviy jarayonlarni modellashtirishdagi ustunliklari — bu ularning chuqur tarixiy komponentga ega bo'lgan tizimlarga nisbatan qo'llanishdagi qulayligi, moslashuvchanligi va modellashtirish aniqligining yuqoriligi bilan belgilanadi. Biroq shuni unutmash kerakki, ushbu tenglamalarning yechimlari klassik usullarga qaraganda ko'proq hisoblash resurslarini talab qiladi, sonli usullar uchun barqarorlik va konvergensiya tahlili murakkab, ba'zan esa algoritmik darajada noaniq bo'ladi. Bu esa kelajakdagi tadqiqotlarda yangi sonli algoritmlar ishlab chiqishni, hisoblash samaradorligini oshirishni, shuningdek, mashinaviy o'rganish va neyron tarmoqlar asosida fraksionar tizimlarni o'rganish imkoniyatlarini ochadi.

XULOSA. Olib borilgan tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli hosilalarning matematik mohiyati va fizikaviy modellashtirishdagi amaliy qo'llanilishi bugungi zamonaviy ilm-fan talablari bilan to'laqonli uyg'unlashadi. Riemann–Liouville, Caputo hamda Grunwald–Letnikov tipidagi hosilalar orqali ifodalangan kasr tartibli tenglamalar murakkab, vaqtga bog'liq va xotiraga ega bo'lgan tizimlar dinamikasini yuqori aniqlikda tavsiflaydi. Fraksionar analiz klassik integer tartibli modellarning chegaralarini kengaytirib, real fizik tizimlardagi kechikish, tarqalish va inertsia hodisalarini modellashtirishga imkon yaratadi. Ayniqsa, anomal diffuziya, viskoelastik materiallarning deformatsiyasi, elektr zanjirlaridagi kechikkan javoblar kabi jarayonlarni aniqlik bilan modellashtirish imkoniyati kasr tartibli hosilalarning ustunligini yaqqol ko'rsatadi.

Tahlil qilingan adabiyotlar, formulalar, sonli va analitik yechim usullari asosida shuni aytish mumkinki, fraksionar tenglamalar klassik modellar bilan taqqoslaganda real hodisalarning matematik ifodalanishini yanada yaqinlashtiradi. Grunwald–Letnikov va ABM (Adams–Bashforth–Moulton) metodlari yordamida yechilgan tenglamalarning grafik va jadval asosidagi natijalari kasr tartibli modellar tizimning vaqt bo'yicha tarixini to'liq hisobga olishini va bu orqali xatolik

darajasining kamayishini tasdiqlaydi. Bu esa ularning fan va texnikadagi roli tobora ortib borayotganini bildiradi.

Shu bilan birga, kasr tartibli tenglamalarning yechimi klassik yechimlarga nisbatan ko‘proq hisoblash resurslarini talab qilishi, numerik usullar barqarorligi va konvergentsiyasi bilan bog‘liq murakkabliklar mavjudligi hisobga olinishi zarur. Shu sababli, kelgusidagi ilmiy izlanishlar samarali va tez ishlovchi algoritmlarni ishlab chiqish, fraksionar modellashtirishni mashinaviy o‘rganish asosida takomillashtirish, biologik, texnologik va ijtimoiy tizimlarga tadbqiq etish kabi yo‘nalishlarda davom ettirilishi maqsadga muvofiqdir.

Umuman olganda, kasr tartibli hosilalarning fizikaviy jarayonlardagi ifodalanuvchanligi, moslashuvchanligi va aniqligi zamonaviy matematik modellashtirishda ajralmas metod sifatida mustahkam o‘rin egallayotganini tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego : Academic Press, 1999. – 340 p.
2. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. – London : Imperial College Press, 2010. – 368 p.
3. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. – 2000. – Vol. 339, No. 1. – P. 1–77.
4. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. – Berlin : Springer, 2011. – 505 p.
5. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. – New York : Academic Press, 1974. – 279 p.
6. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. – Berlin : Springer, 2010. – 247 p.
7. Li C., Zeng F. Numerical Methods for Fractional Calculus. – Boca Raton : CRC Press, 2015. – 360 p.