“JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN” JURNALI
VOLUME 03, ISSUE 06, 2025. JUNE
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

Автоколебания линейного консольного стержена

Мансуров Мухсин Маннонович
Кокандский государственный университет, mansurov00707@mail.ru

Annotation. This article discusses the flutter problem of a physically nonlinear viscoelastic rod in a gas stream, taking into account nonlinear dependencies. A statement and a method for solving the flutter problem of a viscoelastic rod are given taking into account the physical and aerodynamic nonlinearities.

Keywords: viscoelasticity, rod, self-oscillations, flutter, physical nonlinearity, aerodynamic nonlinearity, Bubnov-Galerkin method, relaxation core, numerical method, nonlinear integro-differential equation.

Аннотация. В данной статье рассматривается задача о флаттере физически нелинейного вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом нелинейных зависимостей. Приведена постановка и метод решения задачи флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностей.

Ключевые слова: вязкоупругость, стержень, автоколебания, флаттер, физическая нелинейность, аэродинамическая нелинейность, метод Бубнова-Галёркина, ядро релаксации, численный метод, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

Аннотация. Ушбу мақолада чизиқсиз боғликларни ҳисобга олган ҳолда газ оқимидаги физик чизиқсиз қовушқоқ эластик стерженнинг автотебраниш ҳолати ҳақидаги масала кўрилмокда. Масаланинг қўйилиши, физик ва аэродинамик чизиқсиз қовушқоқ эластик стерженнинг флаттер ҳолати учун масалани ечиш усули асосида матматематик модели келтириб чиыарилган.

Калит сўзлар: қовушқоқ-эластик, автотебраниш, флаттер, физик чизиқсизлик, аэродинамик чизиқсизлик, Бубнов-Галёркин усули, релаксация ядроси, сонли усул, чизиқсиз интеграл-дифференциал тенглама.

Введение. Наследственная теория вязкоупругости предоставила широкую возможность для описания динамических процессов деформирования разнообразных материалов. Поскольку стержни используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при различных формах и исследования конструкций на колебания и динамическую устойчивость с учетом физической линейности материала являются актуальными.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической линейности [4, 7, 8]

$$\sigma = E\left(1 - R^*\right)\varepsilon, \quad \varepsilon = u_x, \quad u = -zw_x \tag{1}$$

или

$$\sigma = -E\left(1 - R^*\right)zw_{xx} \tag{2}$$

где E – модуль упругости.

Учитываем также влияние аэродинамической линейности, по одномерной теории газа давление газа на поршень который имеет вид [1]:

$$q = \frac{\chi p_\infty}{c_\infty}\left[V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

где обозначен $q = p - p_\infty, \quad k = \dfrac{\chi p_\infty}{c_\infty}$

$$q = k\left[V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \tag{3}$$

Решим задачу о флаттере в линейной вязкоупругой постановке учитывая физические и аэродинамические линейности. С этой целью построим математическую модель для исследования вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом этих линейностей.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента используем следующую формулу [2]:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} b(x)\sigma_x z dz \tag{4}$$

(2) поставим в (4) и получаем

$$M_x = -Eb(x)\left(1-R^*\right)\int_{-h/2}^{h/2} z w_{xx} z dz = -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\int_{-h\backslash 2}^{h/2} z^2 dz =$$

$$= -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-h\backslash 2}^{h\backslash 2} = -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\frac{h^3}{12} =$$

$$= -E\left(1-R^*\right)\frac{b(x)h^3(x)}{12}w_{xx}$$

или

$$M_x = -E\left(1-R^*\right)J_2 w_{xx} \tag{5}$$

и равные для стержней шириной $b(x)$ и высотой $h(x)$

$$J_2 = \frac{b(x)h^3(x)}{12}.$$

Подставляя (3) и (5) в уравнение равновесия [2] и перейдя к безразмерным координатам и опуская штрихи имеем

$$(1-R^*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[g(x)w_{xx}\right] + F(x)w_{tt} + Pw_x + \gamma w_t = 0 \tag{6}$$

где

$$w = h_0\bar{w},\ x = a\bar{x},\ t = t_1\bar{t},\ m(x) = m_0\overline{F(x)},\ h(x) = h_0\overline{h(x)},\ b(x) = b_0\overline{b(x)},$$

$$J_2 = J_2^0 g(x), \quad g(x) = b(x)h^3(x), \quad J_2^0 = \frac{b_0 h_0^3}{12},$$

$$P = \frac{kVa^3}{EJ_2^{(0)}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{m_0 a^4}{EJ_2^{(0)}}}, \quad \gamma = \frac{kza^4}{EJ_2^{(0)}t_1}, \quad F(x) = b(x)h(x)$$

$b(x)=c-a_1x;\ h(x)=1-a_2x;\ c=5$

h_0 – величина высоты стержня в концах, b_0 – величина ширины стержня в концах, m_0 – величина массы соответствующий единичному переменного сечения стержня.

Линейные интегро-дифференциальное уравнение в частных производных (6), вместе с граничными [5] и начальными условиями представляют математическую модель задачи о флаттере линейного вязкоупругого стержня. Требуется найти критические скорости $P_{кр}$ приводящий к нарастающему амплитуде колебаний.

Приближенное решение построим методом Бубнова-Галеркина. Представим решение уравнения (6) в виде

$$w=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k(x) \qquad (7)$$

где $\varphi_\kappa(x)$ - известные, базисные функции удовлетворяющие заданным граничным условиям, $u_\kappa(t)$ - неизвестные функции от времени, подлежащие определению.

Для нахождения неизвестных функций $u_\kappa(t)$ подставляем (7) и следующие частные производные в (6)

$$w_x=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k'(x);\quad w_{xx}=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k''(x);$$

$$w_t=\sum_{k=1}^{N}\dot{u}_k(t)\varphi_k(x);\quad w_{tt}=\sum_{k=1}^{N}\ddot{u}_k(t)\varphi_k(x).$$

получим

$$(1-R^*)\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\left[g(x)\varphi_k''(x)\right]''+F(x)\sum_{k=1}^{N}\ddot{u}_k(t)\varphi_k(x)+P\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k'(x)+\gamma\sum_{k=1}^{N}\dot{u}_k(t)\varphi_k(x)=0$$

полученную умножая на $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по x, получаем следующие линейные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\left[a_{ki}\ddot{u}_k(t)+\gamma b_{ki}\dot{u}_k(t)+\omega_{ki}(1-R^*)u_k(t)+Pd_{ki}u_k(t)\right]=0,\ i=\overline{1,N} \qquad (8)$$

где

$$a_{ki}=\int_0^1 F(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,\qquad b_{ki}=\int_0^1\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$\omega_{ki}=\int_0^1\left[d(x)\varphi_k''(x)\right]''\varphi_i(x)dx,\qquad d_{ki}=\int_0^1\varphi_k'(x)\varphi_i(x)dx,$$

Интегрирование линейной системы (8) выполнялось численным методом основанном аналитических преобразований [3], используя ядро Ржаницына–Колтунова $R(t)=A\cdot e^{-\beta t}t^{\alpha-1}$, $A>0$, $\beta>0$, $0<\alpha<1$. Согласно этого

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 03, ISSUE 06, 2025. JUNE
ResearchBib Impact Factor: 9.654/2024 ISSN 2992-8869

метода, численные значения искомых функций $u_к(t_l)=u_{k,l}$ находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\left[a_{ki}+\gamma\frac{\Delta t}{2}b_{ki}\right]u_{k,l}=\sum_{k=1}^{N}\left[\left(a_{ki}+\gamma t_l b_{ki}\right)u_{k,0}+t_l a_{ki}\dot{u}_{k,o}\right]-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i_1=1}^{l-1}\left[\gamma A_{i_1}b_{ki}u_{k,i_1}+A_{i_1}(t_l-t_{i_1})\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\omega_{ki}\left(u_{k,i_1}-\frac{A}{2}\sum_{i_2=1}^{i_1}B_{i_2}e^{-\beta t_{i2}}u_{k,i_1-i_2+1}\right)+Pd_{ki}u_{k,i_1}\right)\right],\ i=\overline{1,N} \qquad (9)$$

где

$$t_i=i\Delta t,\ B_1=\frac{\Delta t^{\alpha}}{2},\ B_{i_2}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[(i_2+1)^{\alpha}-(i_2-1)^{\alpha}\right]}{2},\ i_2=\overline{2,i_1-1}$$

$$B_{i_1}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[i_1^{\alpha}-(i_1-1)^{\alpha}\right]}{2},\ A_1=\frac{\Delta t}{2},\ A_i=\Delta t,\ i_1=\overline{2,i-1},\ i=1,2.....$$

Вычисление проводилось при различных реологических параметров и форм стержня в плане. Расчет произведен как в идеально упругой так и для вязкоупругой стержня.

Анализ и заключение. Анализ результатов физически нелинейных задач показывает, что при изучении влияния параметров наблюдается снижение значения критической скорости упругого состояния (*Ркр*=27.61) относительно вязкого состояния (*А*=0.05, Ркр=22.63), которая показывает 18,0%. Изучены влияния параметров **α** и **γ**. Эффекты, вызванные учетом наследственных свойств материала стержня на критическую скорость, в линейной постановке оказались существенными, например, незначительное уменьшение или увеличение параметра сингулярности **α** приводит к существенному повышению: при α=0.15 (*Ркр*=20.57), при α=0.5 (*Ркр*=23.31) на 11.8% выше. При γ=0.5 значение критической скорости равна *Ркр*=27.55. Ниже чем при γ=0.0. Влияние параметра β незначительно.

Список литературы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1967
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1972

3. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро – дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, «Мехнат», 1987. 269с.

4. Бадалов Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной теории вязкоупругости. Ташкент, «ФАН» 1980. 221с.

5. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1968.

6. Abdikarimov R.A., Mansurov M.M., PulatovSh.Y.Influence of the rod shape on the critical flutter speed articulated at the ends. International Journal of Applied Research 2020. No.6(8), P.30-34.

7. Mansurov M., Abdikarimov R., Mirsaidov M. Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 100 Article No 10003. doi: 10.4123/CUBS.100.3

8. Rustamkhan A. Abdikarimov, Mukhsin M. Mansurov Flutter of a Viscoelastic Rigidly Restrained Bar with Account for Nonlinearities International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics - APAM-2021 AIP Conf. Proc. 2637, 030003- 1–030003-6; https://doi.org/10.1063/5.0121701 Published by AIP Publishing. 978-0- 7354-4229-0.