

GAMILTON SISTEMALARIDA BIRINCHI INTEGRAL

A.Y. Narmanov¹, N.A.Kurbanbayeva²

Annotatsiya. Zamonaviy fizika va matematik analizda muhim o‘rin tutuvchi Gamilton sistemalari klassik mexanikada harakat qonunlarini aniqlashda keng qo‘llaniladi. Gamilton yondashuvi Lagranj mexanikasining rivojlangan shakli hisoblanib, u fazoviy o‘zgaruvchilar (koordinatalar va impulslar) yordamida tizimning vaqt davomida qanday o‘zgarishini aniqlaydi. Gamilton sistemalarining ahamiyati nafaqat mexanika, balki kvant fizikasi, nazariy astrofizika, statistik fizika va hatto iqtisodiyotdagi modellarda ham o‘z aksini topgan. Ayniqsa, integrallanuvchi tizimlar, simmetriya va konservatsiya qonunlarini tahlil qilishda Gamiltonian formalizm asosiy vosita sifatida xizmat qiladi [1-3].

Аннотация. Гамильтоновы системы занимают важное место в современной физике и математическом анализе, широко применяясь для определения законов движения в классической механике. Гамильтонов подход является усовершенствованной формой лагранжевой механики и позволяет описывать эволюцию системы во времени с использованием фазовых переменных (координат и импульсов). Значение гамильтоновых систем выходит за рамки механики и проявляется также в квантовой физике, теоретической астрофизике, статистической физике и даже в моделях экономики. Особенно гамильтонов формализм играет ключевую роль в анализе интегрируемых систем, симметрий и законов сохранения [1–3].

Abstract. Hamiltonian systems play a significant role in modern physics and mathematical analysis, being widely used to describe the laws of motion in classical mechanics. The Hamiltonian approach is an advanced form of Lagrangian mechanics that determines the system’s evolution over time using phase variables (coordinates and momenta). The importance of Hamiltonian systems extends beyond mechanics, finding applications in quantum physics, theoretical astrophysics, statistical physics, and even economic modeling. Notably, the Hamiltonian formalism serves as a fundamental tool in the analysis of integrable systems, symmetries, and conservation laws [1–3].

¹ Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Matematika fakulteti Geometriya va topologiya kafedrasida f-m.f.d., professori.

² Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Matematika fakulteti Geometriya va topologiya kafedrasida magistranti.

Kirish. Bizga biror M sohada H - haqiqiy qiymatli funksiya berilgan va x nuqtani lokal koordinatalari $\{ \} x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ va $V_H = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektor maydoni berilgan bo'lsin. Bu vektor maydonni ixtiyoriy F - silliq funksiyaga ta'sirini quyidagicha yozish mumkin [6].

$$V_H = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \{F, H\}$$

bundan

$$\xi_i(x) = V_H(x_i) = \{x_i, H\}$$

$$\{F, H\} = V_H(F) = \sum_{i=1}^m \{x_i, H\} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

bo'ladi. Puasson qavsi xossasidan

$$\{x_i, H\} = -\{H, x_i\} = -V_{x_i}(H) = -\sum_{j=1}^m \{x_j, x_i\} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^m \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

Hosil bo'lgan tenglikni (1) tenglikka qo'yamiz

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

tenglikdagi $\{x_i, x_j\} = J_{ij}(x)$ - matritsani hosil qiladi. Bu matritsa ko'rib turganimizdek bazislardan qurilgan $m \times m$ o'lchamli kososimmetrik matritsa bo'ladi. Bu Puasson ko'pxilligining *strukturali matritsasi* deyiladi [4-5, 7]. Strukturali matritsa bir qiymatli Puasson strukturasini aniqlaydi.

tenglikni F va H funksiyalar gradienti orqali tasvirlasak,

$$\{F, H\} = F \nabla J * \nabla H$$

ga teng bo'ladi.

Asosiy qism. Bizga H funksiyaga mos keluvchi Gamilton sistemasining ko'rinishi berilgan bo'lsin



$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x, t)$$

Ta'rif.1 Berilgan $P(x, t)$ funksiya yuqoridagi Gamilton sistemaning birinchi integrali deyiladi, agar bu sistemasining ixtiyoriy $x(t)$ yechimi uchun $P(x(t), t) = const$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Masalan. Yuqorida ko'rsatilgan

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Sistema uchun

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

funksiya uning birinchi integrali bo'ladi, chunki bu sistemani

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

Yechimini $H(x, y)$ funksiya ta'siri o'zgarmas bo'ladi ya'ni

$$H(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) = const.$$

Sistema uchun $H(x, y) = x^2 + y^2$ va $H_1(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ funksiyalar uning birinchi integrali bo'ladi.

Teorema Berilgan $P(x, t)$ funksiya vaqtga bog'liq bo'lmasa, u yuqoridagi gamilton sistemaning birinchi integrali bo'ladi.

Masala. Aytaylik, $H(x, t)$ - Gamilton funksiya vaqtga bog'liq bo'lmagan sistemaning birinchi integrali bo'lsa, u holda $\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ va hokazolar birinchi integral bo'lishini ko'rsating.

Yechim. $H = x^2 + y^2$ funksiya

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Sistema uchun birinchi integral chunki

$$\begin{cases} x(t) = 2x_0 \cos t - 2y_0 \sin t \\ y(t) = 2x_0 \sin t + 2y_0 \cos t \end{cases}$$

Yechimi $H(x, y)$ funksiyaga ta'siri o'zgarmasdir, ya'ni

$$H(x(t), y(t)) = 4(x_0^2 + y_0^2) = \text{const.}$$

Demak, Sistema uchun $H = x^2 + y^2$ birinchi integral bo'ladi

Huddi shunday

$$\begin{cases} x'(t) = -2x_0 \sin t - 2y_0 \cos t \\ y'(t) = 2x_0 \sin t - 2y_0 \cos t \end{cases}$$

Yechimni $H(x, y)$ funksiyaga ta'siri o'zgarmasdir, ya'ni

$$H(x'(t), y'(t)) = 4(x_0^2 + y_0^2) = \text{const.}$$

Shunday qilib $H(x, y)$ Gamiltonian vaqtga bog'liq bo'lmasa, u Gamilton

sistemaning ixtiyoriy $\frac{\partial H}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ va hokazolar ham teorema ko'ra birinchi integrali bo'ladi.

Xulosa. Mazkur ishda Gamilton sistemalari va ularga mos birinchi integrallar tushunchasi matematik nuqtai nazardan tahlil qilindi. Gamilton sistemasi uchun berilgan funksiyaning birinchi integral bo'lishi, ya'ni tizimning harakat trayektoriyasi davomida o'zgarmas qiymatga ega bo'lishi shartlari bayon etildi.

Ish davomida vaqtga bog'liq bo'lmagan Gamilton funksiyalari asosida qurilgan sistemalar uchun ularning yuqori tartibli xosilalarining ham birinchi



integrallar bo‘lishi matematik asoslar bilan isbotlandi. Bu esa Gamilton sistemalarining turg‘unlik, integrallanuvchanlik xossalarini chuqurroq tushunishga xizmat qiladi.

Olingan natijalar fizik va texnik tizimlarning dinamikasini modellashtirishda, shuningdek, nazariy fizika, mexanika va differensial tenglamalarni integrallash sohalarida qo‘llanilishi mumkin. Ayniqsa, Gamilton yondashuvining fazoviy strukturani saqlab qoluvchi xususiyatlari ularni tahliliy va sonli metodlar yordamida tadqiq etishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.

1. A.Ya. Narmanov, O.Yu. Qosimov, J. Geom. Symmetry Phys. **55**, 39-49 (2020).
2. A.Ya. Narmanov, S. Saitova, Differential Equations **53** (2017).
3. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems (Udmurtskiy universitet, Izhevsk, 1999).
4. H. Sussman, Transactions of the AMS **180**, 171-188 (1973).
5. K. Ramazanova, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **6**, 137-143 (1966).
6. P. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations (Springer, New York, 1993).
7. S. Kadomcev, VINITI, Problems in geometry **7**, 267-278 (1975).

Research Science and Innovation House