ДИАФАНТОВО ПРИБЛИЖЕНИЕ С ДВУМЯ ПРОСТЫМ ЧИСЛОМ И КВАДРАТАМИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Каттахўжаева Жаҳонбиби Акрамжон қизи.

ТерДУ. Магистр первого курса.

В этой статье мы исследуем диофантову задачу с двумя простым и квадратами простых чисел. Цель состоит в том, чтобы приблизить любое действительное число с помощью значений вида

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3{}^2$$

где p_1, p_2, p_3 – простые числа, а коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – действительные числа, удовлетворяющие некоторым заданным условиям. Мы докажем следующую теорему

Теорема 1. Предположим, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – ненулевые действительные числа, не одного знака и что λ_1 / λ_2 иррациональны. Пусть ϖ будет любое действительное число. Тогда для γ и любого ε >0 неравенство

$$\left|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3{}^2 + \varpi\right| \le \left(\max\left\{p_1, p_2, p_3^2\right\}\right)^{-\gamma+\varepsilon} \qquad (1)$$

имеет бесконечно много решений в простых переменных p_1, p_2, p_3.

Результаты такого типа были впервые рассмотрены с одним простым и трёх квадратами простых чисел Li и Wang [1] и Yuchao Wang, Weili Yao [2], которые, по существу, соответственно установили (1) с $\gamma = \frac{1}{28}$, $\gamma = -\frac{1}{14}$, в том же предположении. Впоследствии показатель был улучшен Languasco и Zaccagnini [3] до $\gamma = \frac{1}{18}$, а Liu и Sun [6] - до $\gamma = \frac{1}{16}$. Доказательство теоремы 1 основывается на адаптации Дэвенпорта–Хайльбронна метода круга, разработанного в [2], в сочетании с методом решета. Для более ранних работ, объединяющих их (см. Harman [3] и Matomaki [4]). Наше улучшение проистекает из использования функции $\rho(m)$, построенной в Harman и Kumchev [5] (см. также [3]), которая является нетривиальной нижней границей характеристической функции простых чисел. Более того, мы докажем следующий результат.

Теорема 2. Предположим, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – ненулевые действительные числа, не одного знака, и что как λ_1 / λ_2 являются иррациональны и λ_1 / λ_3, λ_2 / λ_3

алгебраическими. Пусть ϖ будет любое действительное число. Тогда для $\gamma = \frac{2}{13}$ и любого ε >0 неравенство (1) имеет бесконечно много решений в простых переменных p_1, p_2, p_3.

λ_1 / λ_2 являются алгебраическими, что позволяет нам использовать функции, построенные в Хармане и Кумчеве [6].

Обозначим $\Re$ множество иррациональных чисел ξ, для которых знаменатели q_m сходящихся к ξ, расположенные в порядке возрастания величины, удовлетворяют $q_{m+1} << q_m^{1+\varepsilon}$. Отметим, что наш метод по существу устанавливает теорему 2 с $\lambda_1 / \lambda_2 \in \Re$. Если из теоремы Рота следует, что все алгебраические числа принадлежат $\Re$. Более того, почти все действительные числа, в смысле меры Лебега, также принадлежат $\Re$.

В разделе 2 мы приводим краткое изложение доказательства теоремы 1. В разделах 3 и 4 мы ограничиваем наше внимание большой дугой и малой дугой соответственно. В разделе 5 мы рассмотрим тривиальную дугу и завершим доказательство теоремы 1. Наконец, в разделе 6 мы представляем набросок доказательства теоремы 2.

На протяжении всей статьи мы используем стандартные обозначения в теории чисел. В частности, ε для достаточно малого положительного числа и *c* обозначает абсолютную константу, не обязательно одинаковую во всех случаях. Для удобства мы используем обозначение $L = \log X$ где X – достаточно большой параметр.

Литература.

1. W.P. Li, T.Z. Wang, Diophantine approximation with one prime and three squares of primes, Ramanujan J. 25 (2011) 343–357.

2. H. Davenport, H. Heilbronn, On indefinite quadratic forms in five variables, J. Lond. Math. Soc. 21 (1946) 185–193.

3. G. Harman, The values of ternary quadratic forms at prime arguments, Mathematika 51 (2005) 83–96.

4. K. Matomäki, Diophantine approximation by primes, Glasg. Math.J.52 (1) (2010) 87-106.

5. G. Harman, A.V. Kumchev, On sums of squares of primes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 (1) (2006) 1–13.

6. G. Harman, A.V. Kumchev, On sums of squares of primes II, J. Number Theory 130 (9) (2010) 1969–2002.