MULTIDISCIPLINARY JOURNAL: FUNDAMENTAL RESEARCH SCIENTIFIC JOURNAL
VOLUME 01. ISSUE 02. FEBRUARY 2025.

VEKTORLARNING SKALYAR KO'PAYTMASI.

Axatqulov Anvar Almasovich. Jizzax davlat pedagogika universiteti
"Tabiiy va aniq fanlarda masofaviy ta'lim" kafedrasi o'qituvchisi

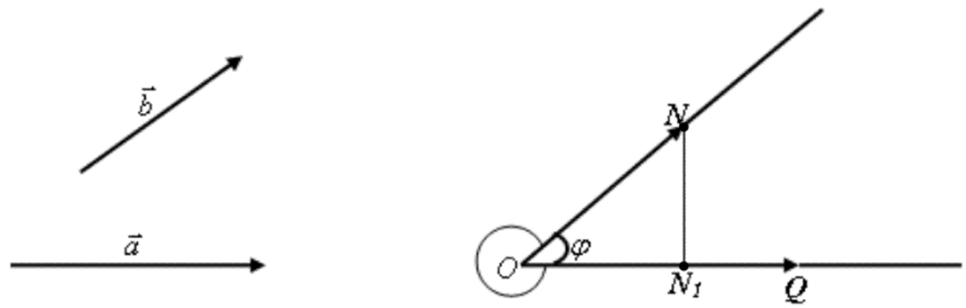
Annotatsiya: Ushbu maqolada vektorlarning skalyar koʻpaytmasi tushunchasi, uning asosiy xossalari va qoʻllanilish sohalari koʻrib chiqiladi. Skalyar koʻpaytma yordamida ikki vektor orasidagi burchakni aniqlash, vektorlarning ortogonal (oʻzaro perpendikulyar) ekanligini tekshirish va fizikadagi mexanik muammolarni hal qilish usullari tushuntiriladi. Shuningdek, skalyar koʻpaytmaning analitik ifodasi va uning geometriyadagi hamda algebraik hisob-kitoblardagi ahamiyati yoritiladi. Maqola matematika, fizika va muhandislik sohalarida vektor analiziga qiziquvchilar uchun foydalidir.

Kalit soʻzlar: vektor, skalyar koʻpaytma, vektorlar algebra, geometriya, matematik amallar, vektorlarning ichki koʻpaytmasi, koordinatalarda skalyar koʻpaytma, trigonometrik bogʻliqlik, kosinus teoremasi.

Kirish. Matematik analiz va chiziqli algebra fanlarida vektorlar ustida turli amallar bajariladi. Ulardan biri — vektorlarning skalyar koʻpaytmasi boʻlib, u geometriya, fizika va muhandislik sohalarida keng qoʻllaniladi. Skalyar koʻpaytma tushunchasi ikki vektor orasidagi burchakni aniqlash, proyeksiya hisoblash va mexanikaning baʼzi qonuniyatlarini tadqiq etishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu maqolada vektorlarning skalyar koʻpaytmasi tushunchasi, uning asosiy xossalari va amaliy qoʻllanilishi haqida soʻz yuritamiz.

Yuqorida, vektorlar ustidagi chiziqli amallar: vektorni qo'shish va ayirish, vektorni songa ko'paytirish amallari bilan tanishdik. Endi chiziqli bo'lmagan yangi amal, vektorni skalyar ko'paytirish amali bilan tanishaylik.

Fazoda (yoki tekislikda) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. O nuqtaga $\vec{a}=\overrightarrow{OQ}, \vec{b}=\overrightarrow{ON}$ vektorlarni qo'yamiz (1-chizma).



1-chizma

O,Q,N nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda, OQ va ON nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi-\varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\vec{a}\,\vec{b})=\varphi$ ko'rinishda belgilaymiz.

1-tarif. $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi.

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{A}\cdot\vec{B}$ yoki $\vec{AB}$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta, \qquad (1)$$

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytma xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$; (komutativ)

2^0. Ixtiyoriy uchta $\vec{A}$, $\vec{B}$ va $\vec{C}$ vektorlar uchun $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$;

3^0. Ixtiyoriy $\vec{A}$ vektor uchun $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2=\left|\vec{A}\right|^2$

4^0. $\vec{a}\,\vec{a}$ coni $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi belgilanadi. $\sqrt{\vec{a}^2}$ soni $\vec{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\vec{a}|$ bilan belgilanadi.

5^0. Agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, $\vec{a}^2=0$.

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta'rifga ko'ra
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}&=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{b}\wedge\vec{a})\end{aligned}.$$

Kosinus juft funksiya ekanini e'tiborga olsak, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3^0-xossa, skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})$, lekin $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ va $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})=\cos(\vec{a}\,\vec{b})$. Shuning uchun $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4^0-xossa skalyar ko'paytma ta'rifidan

$\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos 0^0=|\vec{a}|$ $\qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0 \qquad (2)$$

Buning isboti ta'rifdan kelib chiqadi.

Ortanormallangan $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \qquad (3)$$

Haqiqatan skalyar ko'paytma ta'rifidan

$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=|\vec{e}_i||\vec{e}_j|\cos(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)=1\cdot 1\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

Xususiy holda

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i=|\vec{e}_i|^2=1 \qquad (4)$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Uch o'lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ berilgan bo'lsin, bu bazisga nisbatan $\vec{A}(A_1,A_2,A_3)$, $\vec{B}(B_1,B_2,B_3)$ koordinatalarga ega:

$$\vec{A}=A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3$$
$$\vec{B}=B_1e_1+B_2e_2+B_3e_3$$

$\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblashda (2) va (4) larni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)\cdot(B_1e_1+B_2e_2+B_3e_3)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmasining yig'indisiga teng. Ya'ni:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}=&A_1B_1e_1+A_1B_2e_1e_2+A_1B_3e_1e_3+\\+&A_2B_1e_2e_1+A_2B_2e_2e_2+A_2B_3e_2e_3+\\+&A_3B_1e_3e_1+A_3B_2e_3e_2+A_3B_3e_3e_3.\end{aligned} \qquad (5)$$

bu tenglikdan $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$

Natijalar. 1. $\vec{A}(A_1,A_2,A_3)$ vektor uzunligi

MULTIDISCIPLINARY JOURNAL: FUNDAMENTAL RESEARCH SCIENTIFIC JOURNAL
VOLUME 01. ISSUE 02. FEBRUARY 2025.

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^3} \qquad (6)$$

2. Ikki $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektorlar orasidagi burchak (1) ga ko'ra

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (7)$$

Agar $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektor koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (8)$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi algebra va geometriyada muhim tushuncha bo'lib, u ikki vektor orasidagi burchak va ularning uzunliklari bilan bog'liq hisob-kitoblarni amalga oshirishda qo'llaniladi. Bu ko'paytma ikki vektorning modullari va ular orasidagi burchakning kosinusi orqali aniqlanadi. Skalyar ko'paytma natijasi skalyar miqdor bo'lib, u vektorlar orasidagi yo'nalish va parallel yoki perpendikulyar ekanligini aniqlashda muhim rol o'ynaydi. Shuningdek, u fizikada ish, kuch va proyeksiya kabi tushunchalarni hisoblashda qo'llaniladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Mahmudov N. "Matematik analiz va geometriya asoslari" – Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti, 2018.
2. Qosimov I., O'rozov M. "Geometriya: nazariya va amaliyot" – Toshkent: O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi nashriyoti, 2020.
3. Xamidov U. "Matematik transformatsiyalar va ularning qo'llanilishi" – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016.
4. Rashidov A., Norqulov B. "Geometriyaning asosiy tushunchalari va metodlari" – Toshkent: Fan va texnologiya, 2019.
5. Muminov S. "Geometriya va uning amaliy ahamiyati" – Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti, 2021.
6. Jo'rayev N. "Simmetriya va transformatsiyalar nazariyasi" – Toshkent: Fan, 2017.