KOMPLEKS SONNİNG TRIGONOMETRIK SHAKLI

Raxmatov Alisher Shirinboyevich. Jizzax davlat pedagogika universiteti "Tabiiy va aniq fanlarda masofaviy ta'lim" kafedrasi o'qituvchisi
alisherraxmatov0@gmail.com
Komilov Shaxzod Zokirjon o'g'li. Jizzax davlat pedagogika universiteti 4-kurs talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada kompleks sonning trigonometrik shakli haqida batafsil ma'lumot beriladi. Dastlab, kompleks sonlarning asosiy tushunchalari va ularning moduli hamda argumenti tushuntiriladi. Keyinchalik, Euler formulasi asosida kompleks sonning trigonometrik shakli z=r(cosθ+isinθ) ko'rinishida ifodalanishi tushuntiriladi. Maqolada kompleks sonlarning trigonometrik shaklda ko'paytirish, bo'lish, darajaga oshirish va ildiz chiqarish amallari misollar bilan yoritiladi. Shuningdek, ushbu shaklning elektronika, fizika va injiniringdagi qo'llanilishi haqida ham qisqacha ma'lumot beriladi. Maqola matematikani chuqur o'rganayotgan talabalar, muhandislar va ilmiy izlanish olib borayotgan mutaxassislar uchun foydali bo'lishi mumkin.

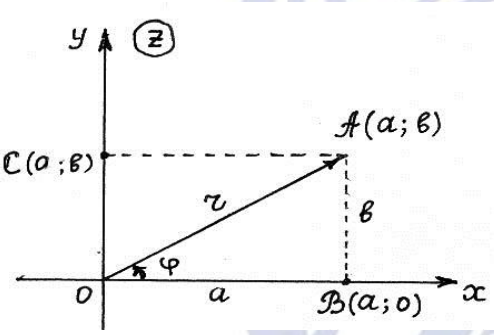
Kalit so'zlar: kompleks son, trigonometrik shakl, modul, argument, Euler formulasi, polar koordinatalar, De Moivre formulasi, haqiqiy qism, mavhum qism, matematik formulalar.

Kirish: Matematikaning rivojlanishi davomida turli muammolarni yechish jarayonida yangi son tushunchalari paydo bo'lib kelgan. Haqiqiy sonlar to'plami (musbat, manfiy, butun, kasr, irratsonlar) matematik ehtiyojlarni ma'lum darajada qondirgan bo'lsa-da, ayrim masalalarda $x^2+1=0$ kabi tenglamalarni yechishda yangi sonlar tushunchasi kerak bo'ldi. Chunki bu tenglamada hech qanday haqiqiy son x ning kvadrati manfiy bo'lishiga olib kelmaydi.

Haqiqiy sonlar bilan ish ko'rilganda noldan farqli har qanday haqiqiy sonni kvadrati musbat bo'ladi deyilgan edi. Ammo kvadrati manfiy bo'lgan sonlar bilan ham ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday sonlar tabiiyki haqiqiy son bo'lmaydi.

Koordinatalar boshini qutb, *0x* o'qning musbat yo'nalishini qutb o'qi deb (z) kompleks tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. φ va r $A(a,b)$ nuqtaning qutb koordinatalari bo'lsin.

A nuqtaning qutb radiusi *r*, ya'ni *A* nuqtadan qutbgacha bo'lgan masofa $z=a+bi$ kompleks sonning **moduli** deyiladi va $|z|$ *kabi belgilanadi.*



Pifagor teoremasiga binoan 1-chizmadagi to'g'ri burchakli *OAB* uchburchakdan $r=\sqrt{a^2+b^2}$ kelib chiqadi. Masalan, $z_1=-3+4i$ sonning moduli $r_1=|z_1|=|-3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ga teng. Noldan farqli har qanday kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sondir.

A nuqtaning qutb burchagi φ ni *z* kompleks sonning **argumenti** deyiladi va *Argz* kabi belgilanadi. Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi\kappa$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k-butun son. Argumentning hamma qiymatlari orasida $0\le\varphi<2\pi$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat **bosh qiymat** deyiladi va $\varphi=argz$ kabi belgilanadi.

Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ ni hisobga olib $z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$ yoki $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ *(1)* tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda $z=a+bi$ kompleks sonning **trigonometrik shakldagi yozuvi** deb ataladi.

Qutb burchagi $\varphi=arctg\frac{b}{a}$ kabi topilishi ma'lum.

Shunday qilib, z kompleks sonning moduli deb uni tasvirlovchi vektorning uzunligiga, argumenti deb shu vektorning $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagiga aytilar ekan.

$\varphi=arctg\frac{b}{a}$ argumentni hisoblashda z kompleks sonning koordinatalar tekisligining qaysi choragida yotishini hisobga olish kerak, chunki $arctg\frac{b}{a}$ qiymatga φ argumentning ikkita qiymatlari mos keladi. Shuning uchun

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & agar \quad a>0, \ b>0 \ \ bo'lsa, \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a}, & agar \quad a<0, \ b \ \ ista\lg an \ \ son \ \ bo'lsa, \\ 2\pi + arctg\dfrac{b}{a}, & agar \quad a>0, \ b<0 \ \ bo'lsa. \end{cases}$$

tenglikdan foydalanish kerak. Masalan,

$arg(1+i)= arctg1=\frac{\pi}{4}$, chunki $a=1>0$, $b=1>0$, $arg(-1+i)=$ $=\pi+ arctg(-1)= \pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, chunki $a=-1<0$, $b=1>0$, $arg(-1-i)=\pi+ arctg1=\frac{5\pi}{4}$, chunki $a=-1<0$, $b=-1<0$, $arg(1-i)= 2\pi+ arctg(-1)=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$, chunki $a=1>0$, $b=-1<0$.

Kompleks sonning $z=a+bi$ ko’rinishdagi yozuvi kompleks sonning **algebraik** shakli deyiladi.

Kompleks son vektor shaklida tasvirlanganda haqiqiy songa $0x$ o’qda yotuvchi vektor, sof mavhum songa $0y$ o’qda yotuvchi vektor mos keladi.

1-misol. $z=a+bi$ va $\bar{z}=a-ib$ qo’shma kompleks sonlar bir xil modullarga ega va argumentlarining absolyut qiymatlari teng, ishoralari qarama-qarshi ekanligini ko’rsating.

Yechish. 2-chizmadan

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{va} \quad |\bar{z}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$

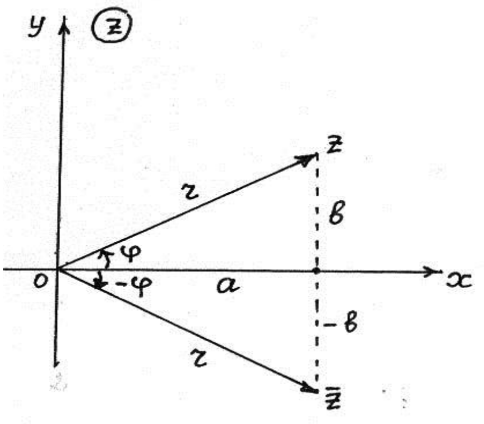
ekani, ya'ni $|z|=|\bar{z}|$ va $arg z= -arg\,\bar{z}$ ekani kelib chiqadi.

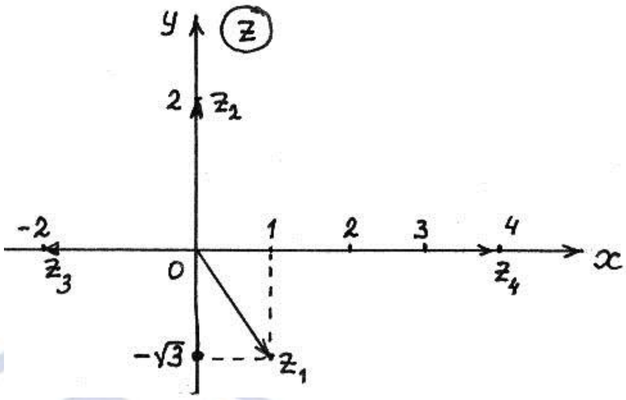
Izoh: Har qanday haqiqiy A sonni ham trigonometrik shaklda yozish mumkin, ya’ni $A>0$ bo’lsa, $A=A(cos o+isin o)$,

(2)

$A<0$ bo’lsa, $A=|A|(cos\,\pi+isin\,\pi)$

tengliklar o’rinlidir.





2-chizma. 3-chizma.

2-misol. $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i$, $z_2=2i$, $z_3=-2$, $z_4=4$ kompleks sonlar trigonometrik shaklda yozilsin.

Yechish. 1) $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i$ son uchun $a=1$, $b=-\sqrt{3}$, $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$,

$$tg\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3},\quad \varphi=2\pi-arctg\sqrt{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}.$$

Shunday qilib, $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

2) $z_2=2i$-sof mavhum son. $a=0$, $b=2$, $r=\sqrt{0^2+2^2}=2$,

$\varphi=\frac{\pi}{\;}$, $z_2=2i=2(\cos\frac{\pi}{\;}+i\sin\frac{\pi}{\;})$.

2 2 2

3) z=-2- manfiy haqiqiy son. Shuning uchun (2) formulaning ikkinchi tenglamasiga binoan

$z_3=-2=|-2|(\cos\pi + i\sin\pi)$ bo'ladi.

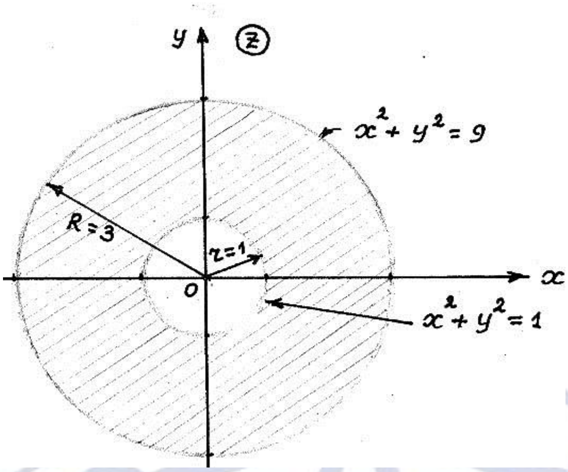
4) $z_4=4$- musbat haqiqiy son bo'lgani uchun (2) formulaning birinchi tenglamasiga binoan $z_4=4=4(coso+isino)$ bo'ladi.

3-misol. $|z|\leq 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks sonlarga mos Z-kompleks tekisligi nuqtalarining to'plami topilsin.

Yechish. $z=x+iy$ desak $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ bo'lib, berilgan tengsizlik $\sqrt{x^2+y^2}\leq 3$ yoki $x^2+y^2\leq 9$ ko'rinishga ega bo'ladi. $x^2+y^2=9$ tenglik markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 3 ga teng aylanani ifodalaydi. Demak, $x^2+y^2\leq 9$-markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 3 ga teng doiraning nuqtalari. Bunda $x^2+y^2=9$ aylananing nuqtalari ham to'plamga tegishli.

4-misol. $1\leq|z|<3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z kompleks sonlariga mos Z- kompleks tekisligi nuqtalarining to'plami topilsin.

Yechish. 3-misolning natijasidan foydalanib $1\leq x^2+y^2<9$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. $x^2+y^2\geq 1$ tengsizlik Z tekislikdagi markazi koordiatalar boshida bo'lib radiusi 1 ga teng aylanada va undan tashqarida yotgan nuqtalar to'plamini ifodalaydi. $x^2+y^2<9$ tengsizlik esa Z tekislikdagi markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 3 ga teng aylananing ichida yotgan nuqtalar to'plamini ifodalaydi. Demak berilgan tengsizliklar Z tekislikdagi markazi koordinatalar boshida bo'lgan va radiuslari 1 ga va 3 ga teng konsentrik aylanalar orasidagi halqani ifodalar ekan. Bunda radiusi 1 ga teng aylananing nuqtalari ham halqaga tegishli.



(4-chizma).

5-misol. $|z+2-i|=|z+4i|$ (α)tenglikni qanoatlantiruvchi z kompleks sonlar to'plami (z) kompleks tekisligida nimani ifodalaydi?

Yechish. $z=x+iy$ desak (α) tenglikni $|x+iy+2-i|=|x+iy+4i|$ yoki $|x+2+i(y-1)|=|x+i(y+4)|$ ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi tenglikni kompleks sonni modulini topish formulasiga asoslanib

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+4)^2} \qquad (\beta)$$

kabi yozamiz. Bu yerdagi $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$ ifoda $z=x+iy$ kompleks songa mos keluvchi *A(x,y)* nuqtadan *M(-2;1)* nuqtagacha masofani, $\sqrt{(x^2+(y+4)^2}$ esa shu *A(x,y)* nuqtadan *N(0;-4)* nuqtagacha masofani ifodalaydi. Demak, *(β)* tenglik *A(x,y)* nuqtadan *M(-2;1)* va *N(0;-4)* nuqtalargacha masofalar teng ekanligini ko'rsatadi. Kesmaning o'rta perpendikulyari uning uchlaridan bir xil masofada yotishini hisobga olsak berilgan tenglamadagi kompleks sonlariga z kompleks tekislikdagi *MN* kesmani o'rta perpendikulyarini ifodalovchi to'g'ri chiziqning nuqtalari to'plami mos kelishi ayon bo'ladi.

Foydalanilgan manba va adabiyotlar.

1. Keldiyor U., Ergashev M., Xudoyberganov A. – *Oliy matematika* Toshkent: O'zbekiston Milliy Universiteti nashriyoti, 2018.
2. Rahmatullayev Sh., *Matematika asoslari* Toshkent: O'zbekiston Fanlar akademiyasi, 2020.
3. Ahmedov I., Hamidov B., Rahmonov U. Matematika (Oliy o'quv yurtlari uchun darslik) Toshkent: "Fan va texnologiya" nashriyoti, 2017.
4. Karimov U. – *Kompleks sonlarning analitik funksiyalari* O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Matematika instituti jurnali, 2019-yil.
5. Ziyouz.com – Matematika bo'yicha elektron darsliklar Manzil: https://ziyouz.com
6. O'zbekcha Vikipediya – Kompleks sonlar Manzil: https://uz.wikipedia.org/wiki/Kompleks_sonlar