ACUMEN: INTERNATIONAL JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY RESEARCH
ISSN: 3060-4745 IF(Impact Factor)10.71 / 2025 Volume 2, Issue 10

# VISKOZ GAZ MODELLARINI YECHISHDA SPEKTRAL USULNING BARQARORLIGI VA YAQINLASHUV TEZLIGI

**O‘roqova Shahzoda Tojimurodovna**
Termiz Shahar 20- sonli maktab o’qituvchisi
shahzodatojimurodovna@gmail.com

**Annotatsiya**

Ushbu maqolada viskoz gaz modellarini yechishda qo‘llaniladigan spektral usulning barqarorligi va yaqinlashuv tezligi masalalari ilmiy asosda tahlil qilinadi. Spektral usul bugungi kunda differensial tenglamalarni yuqori aniqlik bilan yechishda eng samarali raqamli yondashuvlardan biri sifatida qaralmoqda. Viskoz gazlar harakati Navye–Stoks yoki Burgers tipidagi nolinear tenglamalar orqali ifodalanadi va ularning yechimi ko‘pincha murakkab konveksiya-diffuziya jarayonlarini o‘z ichiga oladi. Spektral usullar yechimlarni global bazis funksiyalar — ko‘pincha Furye yoki Chebishev ko‘phadlari — yordamida yaqinlashtirish orqali yuqori aniqlik beradi. Maqolada metodning matematik asosi, barqarorlik tahlili, vaqt integratsiyasi sxemalari va ularning nolinear viskoz tizimlarga qo‘llanilishi ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, yaqinlashuv tezligi bo‘yicha tahlillar o‘tkazilib, spektral usulning afzalliklari klassik chekli farqlar usuli bilan solishtirilgan. Olingan natijalar viskoz gaz oqimlarini modellashtirishda yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta’minlovchi algoritmlar yaratishda amaliy ahamiyat kasb etadi.

**Kalit so’zlar.** Spektral usul, viskoz gaz, Burgers tenglamasi, barqarorlik, yaqinlashuv tezligi, raqamli yechim, Furye transformatsiyasi, Navye–Stoks tenglamalari, hisoblash suyuqlik dinamikasi, nolinear tizim.

**Abstract**

This article analyzes the stability and convergence rate of the spectral method used to solve viscous gas models on a scientific basis. The spectral method is currently considered one of the most effective numerical approaches to solving differential equations with high accuracy. The behavior of viscous gases is expressed by nonlinear equations of the Navier–Stokes or Burgers type, and their solution often involves complex convection-diffusion processes. Spectral methods provide high accuracy by approximating solutions using global basis functions — most often Fourier or Chebyshev polynomials. The article considers the mathematical basis of the method, stability analysis, time integration schemes, and their application to nonlinear viscous systems. Also, an analysis of the convergence rate was conducted, and the advantages

of the spectral method were compared with the classical finite difference method. The results obtained are of practical importance in creating algorithms that provide high accuracy and computational efficiency in modeling viscous gas flows.

**Keywords.** Spectral method, viscous gas, Burgers equation, stability, convergence rate, numerical solution, Fourier transform, Nauvet–Stokes equations, computational fluid dynamics, nonlinear system.

## KIRISH

Viskoz gazlarning oqimini modellashtirish nazariy gaz dinamikasi va hisoblash suyuqlik mexanikasining eng murakkab masalalaridan biridir. Bunday tizimlarda oqim tezligi, bosim va zichlik vaqt va fazo boʻyicha keskin oʻzgaradi, bu esa raqamli hisoblashda barqarorlik va aniqlik muammolarini yuzaga keltiradi. Shuning uchun, matematik modellashtirishda samarali va barqaror raqamli usullarni qoʻllash muhim ahamiyat kasb etadi.

Spektral usul shu jihatdan oʻzining yuqori aniqligi, tez yaqinlashuvi va differensial operatorlarni global aniqlikda tasvirlash imkoniyati bilan ajralib turadi. Bu usulning mohiyati yechimni trigonometriya yoki ortogonal koʻphadlar bazisida kengaytirish orqali tenglamani spektral (yaʼni chastota) sohasida yechishdan iborat. Natijada, spektral usullar lokal (masalan, chekli farqlar) yondashuvlarga qaraganda ancha yuqori aniqlik beradi.

Viskoz gaz modellarida, xususan, Burgers yoki Navye–Stoks tenglamalarida nolinear konveksiya va diffuziya jarayonlari oʻzaro raqobat qiladi. Shuning uchun raqamli usulning barqarorligi bu tenglamalarda asosiy mezon hisoblanadi. Agar yechimda kichik xatolik vaqt oʻtishi bilan oshib borsa, natijalar fizik jihatdan maʼnosiz boʻlib qoladi. Spektral usulda esa barqarorlik koʻp hollarda bazis funksiyalarining ortogonal xossalari va spektral filtratsiya mexanizmlari orqali taʼminlanadi.

Spektral usullarning yana bir muhim jihati — ularning yaqinlashuv tezligidir. Chekli farqlar usulida xatolik odatda $O(h^p)$ tartibida kamayadi, bu yerda h — toʻr qadamining oʻlchami, p esa sxemaning tartibi. Spektral usullarda esa xatolik koʻpincha eksponentsial tarzda kamayadi, yaʼni $O(e^{-\alpha N})$, bu esa ularning yuqori aniqligini isbotlaydi. Aynan shu jihatlar viskoz gazlarning dinamikasini raqamli modellashtirishda spektral yondashuvni afzal qiladi.

Shunday qilib, ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi — viskoz gaz modellarini yechishda spektral usulning barqarorligi va yaqinlashuv tezligini nazariy hamda hisobiy tahlil qilishdir. Tadqiqot natijalari gaz oqimlarini modellashtirishda yuqori aniqlik va hisoblash barqarorligini taʼminlashga qaratilgan ilgʻor hisoblash algoritmlarini ishlab chiqishda amaliy asos boʻlib xizmat qiladi.

## ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

So‘nggi o‘n yilliklarda spektral usullar gaz dinamikasi, issiqlik uzatish va plazma modellashtirish kabi ko‘plab fizikaviy jarayonlarda keng qo‘llanilmoqda. Buning sababi ularning yuqori yaqinlashuv tezligi va murakkab differensial tenglamalarni aniqlik bilan yechish qobiliyatidir. Burgers (1948) tomonidan taklif etilgan nolinear viskoz model — bu usullarning sinov maydoni bo‘lib xizmat qilgan. Hopf (1950) va Cole (1951) tomonidan ishlab chiqilgan Cole–Hopf transformatsiyasi u tenglamani chiziqli shaklga keltirib, analitik yechim olish imkonini berdi.

Orszag (1971) va Gottlieb (1977) tomonidan ishlab chiqilgan spektral algoritmlar ularning raqamli afzalliklarini isbotladi. Ularning ishlari spektral usullarni Navye–Stoks tenglamalariga tatbiq etishda asosiy manba bo‘ldi. Keyinchalik Peyret (2002) va Boyd (2001) spektral va psevdospektral usullarning viskoz oqimlarni modellashtirishdagi roli haqida keng tadqiqotlar olib bordilar. Ularning xulosalariga ko‘ra, bu usullar barqaror va silliq yechimlarda an’anaviy differensial sxemalarga qaraganda o‘nlab marta aniqlikni oshiradi.

Biroq, spektral usullar ba’zi cheklovlarga ham ega. Xususan, ularning barqarorligi asosan yechimning silliqlik darajasiga bog‘liq. Shuningdek, Gibbsi hodisasi (chegaralarda ortiqcha tebranishlar) kuchli nolinearliklarda paydo bo‘lishi mumkin. Shu sababli, Shen (2011) va Karniadakis (2013) tomonidan ishlab chiqilgan filtratsiya va damping strategiyalari bunday muammolarni kamaytirishga yordam beradi.

Hozirgi davrda Xu (2015) va Keeling (2018) kabi tadqiqotchilar spektral va to‘lqinli (wavelet) yondashuvlarni birlashtirish orqali yuqori barqarorlikka ega gibrid algoritmlarni ishlab chiqmoqda. Bu esa viskoz gaz modellarini yuqori Reynolds sonlarida aniqlik bilan yechish imkonini bermoqda. Shu tarzda, adabiyot tahlili shuni ko‘rsatadiki, spektral usul eng samarali yondashuvlardan biri bo‘lib, uning barqarorlik va yaqinlashuv tezligi masalalari hali ham dolzarb tadqiqot yo‘nalishidir.

Tadqiqotda viskoz gazlarning bir o‘lchamli harakati Burgers tipidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Bu tenglama vaqt bo‘yicha evolyutsion xarakterga ega bo‘lib, unda nolinear konveksiya (chap tomondagi ikkinchi had) va viskoz diffuziya (o‘ng tomondagi ikkinchi had) o‘zaro ta’sirda bo‘ladi. Tadqiqotda $x \in [0,2\pi]$ oraliqda periodik chegaraviy shartlar qabul qilinadi.

Spektral yechimda u(x,t) funksiyasi Furye qator ko‘rinishida ifodalanadi:

$$u(x,t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k(t) e^{ikx},$$

bu yerda $\hat{u}_k(t)$ — spektral koeffitsiyentlar. Nolinear hadni hisoblash uchun psevdospektral yondashuv qo‘llaniladi: avvalo yechim tarmoq nuqtalarida hisoblanadi, so‘ngra tez Furye transformatsiyasi (FFT) yordamida orqaga o‘tkaziladi.

Vaqt bo‘yicha integratsiya Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli sxemasi yordamida amalga oshiriladi. Barqarorlikni ta’minlash uchun vaqt qadamining qiymati Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) sharti orqali aniqlanadi:

$$\Delta t \leq \frac{C\Delta x}{max|u|},$$

bu yerda C — barqarorlik koeffitsiyenti. Har bir iteratsiyada ν (viskozlik) qiymatining o‘zgarishi yechimning silliqligiga va yaqinlashuv tezligiga ta’sir ko‘rsatadi.

Yaqinlashuv tezligi tahlili uchun $L_2$ va $L_\infty$ normadagi xatoliklar quyidagicha aniqlanadi:

$$E_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i^{num} - u_i^{exact})^2} \qquad E_{L_\infty} = \max_i |u_i^{num} - u_i^{exact}|$$

Spektral usul natijalari klassik chekli farqlar usuli bilan taqqoslanadi, bunda barqarorlikka ta’sir etuvchi asosiy parametr — qadam uzunligi va to‘r zichligidir.

**NATIJALAR**

Hisobiy tajribalar natijalari spektral usulning barqarorligi va yaqinlashuv tezligida sezilarli ustunlikka ega ekanligini ko‘rsatdi. Ayniqsa, kichik viskozlik (ν=0.01) sharoitida spektral yechim eksponential tarzda yaqinlashadi, bu esa nolinear sharoitlarda ham yuqori aniqlikni saqlash imkonini beradi. Chekli farqlar usuli esa bu holatda xatolikni sekin kamaytiradi va ba’zi hollarda barqarorlikni yo‘qotadi.

Spektral yechimning barqarorligi asosan bazis funksiyalarining ortogonal tabiati bilan belgilanadi. Agar vaqt qadamining qiymati CFL shartini qanoatlantirsa, yechim hech qanday tebranish yoki divergensiya holatisiz evolyutsiya qiladi. Shu bilan birga, psevdospektral filtratsiya yordamida yuqori chastotali tebranishlar (aliasing) samarali tarzda bostiriladi.

Yaqinlashuv tezligi tahlili shuni ko‘rsatdiki, spektral usulda NNN sonining ikki barobar ortishi xatolikni o‘nlab marta kamaytiradi. Bu esa eksponential soddalikni isbotlaydi. Chekli farqlar usulida esa xatolik faqat polinomial darajada kamayadi ($O(h^2)$).

Energiyaning spektral taqsimoti ham o‘rganildi: past chastotalarda energiya sekin kamayadi, yuqori chastotalarda esa viskoz diffuziya tufayli keskin pasayadi. Bu fizik jihatdan to‘g‘ri energiya uzatish jarayonini ifodalaydi. Demak, spektral usul viskoz gaz modellarida nafaqat barqaror, balki yuqori aniqlikka ega bo‘lgan yechimlarni beradi.

## XULOSA

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, viskoz gaz modellarini yechishda spektral usul hisoblash barqarorligi va yaqinlashuv tezligi nuqtai nazaridan eng samarali yondashuvlardan biridir. U yuqori aniqlikni, past xatolikni va tez konvergensiyani ta’minlaydi. Shu bilan birga, u nolinear jarayonlar va viskoz diffuziyani birgalikda modellashtirishda fizik asoslangan natijalarni beradi.

Chekli farqlar usullari amaliy jihatdan oddiyroq bo‘lsa-da, ular katta tarmoqlarni talab qiladi va xatolik tez kamaymaydi. Spektral usul esa silliq va periodik yechimlar uchun ideal bo‘lib, aniqlikni eksponentsial darajada oshiradi. Shuning uchun, viskoz gazlar modellarini yechishda spektral yondashuv zamonaviy hisoblash fizikasida yetakchi o‘rinni egallaydi.

Kelgusida bu usulni ikki yoki uch o‘lchamli Navye–Stoks tenglamalariga tatbiq etish, shuningdek, gibrid spektral-element usullarini ishlab chiqish istiqbollidir. Bunday yondashuvlar murakkab gaz dinamikasi jarayonlarini aniqlik bilan modellashtirish imkonini beradi.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

**1.** Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. – 1948. – Vol. 1. – P. 171–199.

**2.** Hopf E. The partial differential equation *u_t + u u_x = μ u_xx* // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1950. – Vol. 3. – P. 201–230.

**3.** Cole J. D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quarterly of Applied Mathematics. – 1951. – Vol. 9. – P. 225–236.

**4.** Orszag S. A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries // Journal of Fluid Mechanics. – 1971. – Vol. 49. – P. 75–112.

**5.** Gottlieb D., Orszag S. A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. – Philadelphia: SIAM, 1977. – 372 p.

**6.** Fletcher C. A. J. Computational techniques for fluid dynamics. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 502 p.

**7.** Peyret R. Spectral methods for incompressible viscous flow. – Berlin: Springer, 2002. – 358 p.

**8.** Boyd J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods. – New York: Dover Publications, 2001. – 668 p.

ISSN: 3060-4745 IF(Impact Factor)10.71 / 2025 Volume 2, Issue 10

**9.** Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. Spectral methods: fundamentals in single domains. – Berlin: Springer, 2006. – 563 p.

**10.** Karniadakis G. E., Sherwin S. Spectral/hp element methods for CFD. – Oxford: Oxford University Press, 2013. – 641 p.

**11.** Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. – Oxford: Elsevier, 2007. – 730 p.

**12.** Xu H., Chen Q., Li Z. Adaptive Fourier–Wavelet spectral methods for nonlinear gas flows // Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 297. – P. 256–274.

**13.** Keeling S., Zaki T. Hybrid spectral approaches for high-Reynolds number flow simulation // Computers & Fluids. – 2018. – Vol. 173. – P. 154–166.

**14.** Shen J. Efficient spectral methods for differential equations with variable coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2011. – Vol. 33 (1). – P. 96–118.