JOURNAL OF UNIVERSAL SCIENCE RESEARCH

ISSN (E): 2181-4570

О разрешимости однородной системы частично- интегралных уравнений специального вида

Хайруллаев Исматулла Нуруллаевич
Термезский университет экономики и сервиса Доцент кафедры“Экономики и точных наук”
Tel: 93-221-08-59
xayrullayev0809@mail.ru
Кучимов Мухриддин Бахриддин ўғли
Термизский государственний университет магистр 2-курса
Тел:902251777
muxrddinkuchimovofficial@gmail.com

Расмотрим однородную систему линейных частично- интегралных уравнений вида

(1)

$$\begin{cases} f_0 + \lambda_1 \int_a^b a_1(t) f_1(t) dt = 0 \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x) \int_a^b a_2(t) f_1(t) dt + \lambda_3 a_3(x) \int_a^b a_3(t) f_2(x,t) dt = 0 \\ f_1(x) + f_2(x,y) + \lambda_4 a_4(x) \int_a^b a_4(t) f_2(t,y) dt + \lambda_5 a_5(y) \int_a^b a_5(t) f_2(x,t) dt = 0 \end{cases}$$

где фунции$a_j(\cdot)$, $j = \overline{1,5}$ принадлежат пространству $L_2[a,b] f_0 \in C^1$, λ_i, $i = \overline{1,5}$ - числовые параметры;

$f_2(x,y) \in L_2([a,b]^2), f_1(x) \in L_2[a,b]$ искомые функции.

В этой заметке изучена разрешимост однородной системы (1) при всех значениях параметров λ_i , $i = \overline{1,5}$ кроме случая

$\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,5}$

Всюду в далнейшем интеграл понимается по отрезку $[a,b]$.

Основными результатами являются следующие.

ISSN (E): 2181-4570

Пусть детерминанты $D_1(\lambda_1) = 1 + \lambda_1 \int_a^b a_1^2(t)\, dt$Фредгольма [1] ядра $a_1(t)$

Теорема 1.Пусть $\lambda_1 \neq 0\,, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$,тогда

а) если$D_1(\lambda_1) \neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то однородная система имеет решение

$$f_0 = f_0\,,\ f_1(x) = f_2(x,y) = f_0\ ,\ f_0 \in C^1\ , f_0 \neq 0$$

$D_2(\lambda_2) = 1 + \lambda_2 \int a_2^2(t) dt$детерминантФредгольма ядро $\text{К}(x,t) = a_2(x)a_2(t)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda_2 \neq 0\,, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Тогда:

а) если $D_2(\lambda_2) = 0$ то однородная система (1) имеет решение вида

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ca_2(x) \\ -ca_2(x) \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$ то система имеет только нулевое решение.

Аналогичные результаты как в теореме (2) получено и в случаях:

1) $\lambda_3 \neq 0,\ \lambda_i = 0\,, i = 1,2,4,5;$
2) $\lambda_4 \neq 0,\ \lambda_i = 0\,, i = 4;$
3) $\lambda_5 \neq 0,\ \lambda_i = 0\,, i = 5;$

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 \neq 0\,,\ \lambda_2 \neq 0\,,\ \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ и Тогда :

а) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$имеет решение вида $f_0 = 0$,$f_1(x) = -\lambda_2 ca_2(x)$, $f_2(x,y) = \lambda_2 ca_2(x)$ где с – произволная постоянная,

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

ISSN (E): 2181-4570

$f_0 = A(a_1, a_2)$,$f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x)$, $f_2(x,y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$

где$A(a_1, a_2) = \frac{c\lambda_1\lambda_2 \int a_1(t)a_2(t)dt}{D_1(\lambda_1)} = c'.c_1$,c_2 , c' постоянные.

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$ система (1) имеет решение вида

$f_0 = c_1$,$f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x)$, $f_2(x,y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$

гдеc_1 ,c_2 — константы;

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$f_0 = c_2$,$f_1(x) = -c_2 - ca_2(x)$, $f_2(x,y) = c_2 + ca_2(x)$где c- постоянная.

Отметим, что в случаях когда двое из параметров отличны от нуля, а остальные равны нулю имеют аналогичные теоремы.

Теперь пусть $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \int[\sum_{k=1}^{3} \lambda_k a_k^2(t)]dt$детерминантиФредгольма ядро $k(x,t) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k a_k(x) a_k(t)$.

Теорема 4.Пусть $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ Тогда:

а) еслиD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, то система (1) имеет решение вида $f_0 = \lambda \sum_{k=1}^{3} c_k \lambda_k^2 \int a_k^2(t)\, dt = c$,$f_1(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i a_i(x)$,$f_2(x,y) = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i a_i(x)$

б) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и при остальных случаях когда трое из параметров отличны от нуля и остальные равны нулю.

Теорема 5. Пусть $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,4}$, $\lambda_5 = 0$ и

$D_4(\lambda_4) = 1 + \lambda_4 \int a_4^2(t)dt \neq 0$ Тогда:

а) еслиD$(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$=1+$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2 \int a_j^2(t)\, dt = 0$, то система (1) имеет решение вида $f_0 = c_2$,$f_1(x) = A_1(x)$, $f_2(x,y) = B_1(x)$, где

$$c = -\lambda_1 \sum_{i=1}^{3} \lambda'_i c_i \int a_i(t) a'_i(t)dt \ , \ A_1(x) = \sum_{j=1}^{3} \lambda'_j \hat{a}_j(x) c_j ,$$

ISSN (E): 2181-4570

$$B_1(x) = \frac{\lambda_4 a_4(x)}{D_4(\lambda_4)} \sum_{i=1}^{3} \lambda'_i c_i \int a_4(t)\, \hat{a}_i(t) dt\,;$$

б) если D(λ'_1 , λ'_2 , λ'_3)$\neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Список литературы

1. Смирнов В.И. “Курс высшей математики ” Т.4. , Часть I. ,М. “Наука”, 1974 г
2. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. М.: Мир. 1977, 1, Функциональный анализ.
3. Хайруллаев И.Н. Некоторые частично-интегральные операторы и их спектральные свойства //Кандидатская диссертационная работа. Ташкент, 2001.