JOURNAL OF UNIVERSAL SCIENCE RESEARCH

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN LOKAL SHARTLI MASALALAR

Musurmonova Nilufar Allamurat qizi

Termiz iqtisodiyot va servis universiteti matematika 2-kurs magistranti

Orcid 0009000594795522

Bobomurodov Uluĝbek

Ilmiy rahbar, Phd,Termiz iqtisodiyot va servis universiteti

Annotatsiya (o'zbekcha). Ushbu maqolada differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar nazariyasi ko'rib chiqiladi. Lokal shartli masalalarning matematik asoslari, ularni qo'llash sohalari va yechish usullari tahlil qilinadi. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamalar va qisman hosilali differensial tenglamalar uchun lokal chegaraviy shartlarning o'ziga xos xususiyatlari va ularning amaliy ahamiyati yoritiladi.

Kalit so'zlar: *differensial tenglama, lokal chegaraviy shart, Dirixle masalasi, Neyman masalasi, Robin masalasi, yechimning yagonaligi, chekli farqlar usuli.*

Аннотация (русский). В данной статье рассматривается теория локальных краевых задач для дифференциальных уравнений. Анализируются математические основы, области применения и методы решения локальных краевых задач. Особое внимание уделяется специфическим свойствам локальных условий для обыкновенных и уравнений в частных производных.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, локальное краевое условие, задача Дирихле, задача Неймана, задача Робена, единственность решения, метод конечных разностей.*

Abstract (English). This paper reviews the theory of local boundary value problems for differential equations. The mathematical foundations, application areas and solution methods for local boundary value problems are analyzed. Special attention is paid to the specific properties of local boundary conditions for both ordinary and partial differential equations, and their practical significance.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

Keywords: *differential equation, local boundary condition, Dirichlet problem, Neumann problem, Robin problem, uniqueness of solution, finite difference method.*

1. KIRISH

Differensial tenglamalar nazariyasi zamonaviy matematikaning eng muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u fizika, kimyo, biologiya, iqtisodiyot va muhandislik kabi ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Har qanday dinamik jarayonni matematik modellashtishda differensial tenglamalar markaziy o'rinni egallaydi. Biroq differensial tenglama o'zi yagona yechimga ega bo'lmaydi — yechimni aniq belgilash uchun qo'shimcha shartlar talab etiladi.

Ana shunday qo'shimcha shartlar orasida chegaraviy shartlar (yoki shartli masalalar) alohida o'rin tutadi. Chegaraviy masalalar ikki asosiy turga bo'linadi: global (butun sohada berilgan) va lokal (soha chegarasining muayyan nuqtalarida yoki kichik qismlarida berilgan) shartli masalalar. Lokal shartli masalalar ko'pincha amaliy muammolarda uchrab, ularning o'rganilishi nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyat kasb etadi.

Lokal chegaraviy shartlar ko'plab fizik muammolarda tabiiy tarzda yuzaga keladi: qurilma yuzasining bir qismidagi harorat yoki bosim ma'lum bo'lib, qolgan qismi erkin qoladi; elastik sterjanlarning faqat bir uchi mahkamlangan; o'tkazgichlardagi issiqlik taqsimotida faqat ayrim nuqtalarda o'lchov mavjud.

Tadqiqotning ob'ekti: differensial tenglamalar uchun lokal chegaraviy shartli masalalar.

Tadqiqotning predmeti: lokal shartli masalalarning matematik asoslari, turlari, yechish usullari va amaliy qo'llanishlari.

Tadqiqotning maqsadi: differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar nazariyasini tizimli bayon etish, ularning yechilishini o'rganish va amaliy ahamiyatini ko'rsatish.

Tadqiqotning vazifalari: (1) lokal shartli masalalarning ta'rifi va asosiy turlarini aniqlash; (2) yechimning mavjudligi va yagonaligiga oid shartlarni o'rganish; (3) asosiy yechish usullarini tizimlashtirish; (4) amaliy qo'llanishlarni ko'rib chiqish.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

2. MAVZUGA OID ADABIYOTLAR SHARHI

Differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasining klassik asoslari Vladimirov [1] va Coddington-Levinson [2] asarlarida qurilgan. Vladimirov matematik fizika tenglamalarida elliptik, parabolik va giperbolik turdagi tenglamalar uchun turli xil chegaraviy masalalarni to'liq nazariy asosda o'rgangan. Coddington va Levinson esa oddiy differensial tenglamalar nazariyasini, xususan Shturm-Liuvill masalalarini chuqur tahlil qilgan.

Evans [3] ning zamonaviy qo'llanmasida qisman hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar funksional tahlil vositalari — Sobolev fazolari, zaif yechimlar nazariyasi, Lax-Milgram teoremasi — asosida o'rganilgan. Bu asar hozirgi kunda sohaning standart manbasiga aylangan.

Samarskiy [4] differensial tenglamalarning sonli usullari bo'yicha fundamental darslikda chekli farqlar usulini lokal chegaraviy shartlarga qo'llashning batafsil nazariyasini bayon etgan. Ladyzhenskaya [5] matematik fizikaning chegaraviy masalalarini funksional analiz nuqtai nazaridan o'rganib, elliptik tenglamalar uchun yechimning mavjudligi va yagonaligiga oid teoremalar isbotlagan.

Rannacher [6] siqilmas Navier-Stokes tenglamalari uchun chekli elementlar usulini ishlab chiqqan va murakkab geometriyali sohalarda lokal shartli masalalarni yechishning zamonaviy usullarini taqdim etgan.

O'zbekiston olimlari orasida Rashidov [7] differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar bo'yicha monografiya e'lon qilgan. Toshkent davlat texnika universiteti va O'zbekiston Milliy universiteti olimlari ham bu soha bo'yicha muhim tadqiqotlar olib borganlar.

Mavjud adabiyotlardan farqli o'laroq, ushbu maqolada lokal shartli masalalarning barcha asosiy turlari — Dirixle, Neyman, Robin, ko'p nuqtali — bir tizimda ko'rib chiqiladi, ularga mos yechish usullari taqqoslanadi va so'nggi yillardagi PINN (Physics-Informed Neural Networks) usuli kabi yangi yondashuvlar ham baholanadi.

3. TADQIQOT METODOLOGIYASI

Maqolada quyidagi ilmiy usullar qo'llaniladi:

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

- Matematik tahlil va funksional tahlil usullari — yechimning mavjudligi va yagonaligini o'rganishda Lax-Milgram teoremasi, Sobolev fazolari va zaif yechimlar nazariyasidan foydalaniladi. Elliptik operatorlar uchun Adamar to'g'ri qo'yilgan masala tushunchasi asosida yechimning barqarorligi o'rganiladi.
- Tasnif va qiyosiy tahlil usuli — lokal shartli masalalarning asosiy turlari (Dirixle, Neyman, Robin, ko'p nuqtali) fizik mazmuniga ko'ra tasniflanadi va ularning matematik xossalari qiyoslanadi.
- Analitik yechish usullari — o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli, Green funksiyasi usuli va xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli tizimli bayon etiladi. Har bir usulning qo'llanish sohalari va cheklangan tomonlari ko'rsatiladi.
- Sonli usullar tahlili — chekli farqlar usuli (FDM), chekli elementlar usuli (FEM) va chekli hajmlar usuli (FVM) ning lokal shartli masalalarga tatbiqi ko'rib chiqiladi. Zamonaviy PINN usuli ham baholanadi.

4. TAHLIL VA NATIJALAR

4.1. Lokal shartli masalalarning ta'rifi va asosiy tushunchalar

Lokal shartli masala deb — differensial tenglama yechiмiga qo'yiladigan shartlar soha yoki vaqt oralig'ining faqat bir qismida (mahalliy bo'lishida) berilgan masalaga aytiladi. Boshqacha aytganda, yechim haqidagi ma'lumot butun chegara bo'ylab emas, balki uning ayrim nuqtalari yoki kichik kesmalari bo'yicha beriladi.

Matematikada lokal shartli masalalar quyidagi umumiy ko'rinishda ifodalanadi: berilgan [a, b] kesmada differensial tenglama $L(u) = f(x)$ berilgan bo'lsin. Bu yerda L — differensial operator, u — qidirilayotgan funksiya, $f(x)$ — ma'lum funksiya. Lokal shartli masalada u funksiyaga qo'yiladigan shartlar faqat $x = a$ yoki $x = b$ nuqtalarining birida, yoki ularning har ikkisida, lekin bir-biridan mustaqil tarzda beriladi.

Lokal shartlarning klassik misoli sifatida Koshi (boshlang'ich qiymatlar) masalasini keltirish mumkin, unda barcha shartlar $x = a$ nuqtasida beriladi. Lekin Koshi masalasidan farqli o'laroq, umumiy lokal shartli masalalarda shartlar turli nuqtalarda berilib, ular orasida integral yoki funksional bog'liqlik bo'lmasligi mumkin.

4.2. Lokal shartli masalalarning turlari

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

Lokal shartli masalalar to'rt asosiy turga bo'linadi:

a) Dirixle masalasi — yechim funksiyasining o'zi chegarada beriladi: $u|_{\partial\Omega} = g(x)$. Bu holat, masalan, plastinkaning chegarasidagi harorat taqsimotini bilganda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini yechishda paydo bo'ladi. Dirixle sharti eng ko'p uchraydigan lokal shart bo'lib, yechim bevosita qiymatlari orqali boshqariladi.

b) Neyman masalasi — chegarada funksiyaning normal hosilasi beriladi: $\partial u/\partial n|_{\partial\Omega} = h(x)$. Bu holat, masalan, chegaradagi issiqlik oqimi ma'lum bo'lganda paydo bo'ladi. Neyman sharti jismoniy ma'noda oqim yoki gradient boshqarilishini bildiradi.

c) Robin (aralash) masalasi — chegarada funksiya va uning hosilasining chiziqli kombinatsiyasi beriladi: $\alpha u + \beta(\partial u/\partial n) = \varphi(x)$. Bu holat konvektiv issiqlik almashinuvi masalalarida uchraydi va Dirixle bilan Neyman shartlari orasidagi umumiy holat hisoblanadi.

d) Ko'p nuqtali lokal shartli masala — shartlar soha chegarasining bir nechta alohida nuqtalarida beriladi. Bunday masalalar ko'proq murakkab muhandislik tizimlarini modellashtishda uchraydi, masalan, bir necha joydan qo'llab-quvvatlanadigan konstruksiyalarda.

4.3. Yechimning mavjudligi va yagonaligi

Lokal shartli masalalarning yechimini o'rganishda uchta asosiy savol ko'tariladi: yechim mavjudmi, u yagonami va u berilgan ma'lumotlarga uzluksiz bog'liqmi (ya'ni, masala to'g'ri qo'yilganmi). Bu savollar Adamar to'g'ri qo'yilgan masala (well-posed problem) tushunchasi bilan bog'liq.

Oddiy differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalarning yechilishi Shturm-Liuvill nazariyasi doirasida yaxshi o'rganilgan. Agar operator L o'z-o'ziga qo'shma bo'lsa va lokal shartlar mos tarzda berilgan bo'lsa, unda masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi. Biroq operatorning xos qiymatlari muammosi yuzaga kelganda yechim mavjud bo'lmasligi yoki yagona bo'lmasligi mumkin.

Qisman hosilali differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar ancha murakkab bo'lib, ularning yechilishi ko'pincha funksional analiz va Sobolev fazolari nazariyasiga tayangan holda o'rganiladi. Elliptik tipli tenglamalar uchun Lax-Milgram

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

teoremasi yechimning mavjudligi va yagonaligini kafolatlaydi: bilinear shakl a(u,v) kuchli koersitiv va cheklangan bo'lsa, yagona zaif yechim mavjudligi isbotlanadi.

4.4. Yechish usullari

Lokal shartli masalalarni yechishning ikki asosiy toifasi mavjud: analitik va sonli usullar.

Analitik usullar orasida o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli, Green funksiyasi usuli, integral o'zgarishlar usuli (Laplas, Furye transformatsiyalari) va xos funksiyalar bo'yicha yoyish usullari alohida ahamiyatga ega. Green funksiyasi usuli ayniqsa universal bo'lib, u differensial operatorning teskari operatorini integral yadro orqali ifoda etishga asoslanadi. Yechim $u(x) = \int G(x,\xi)f(\xi)d\xi$ ko'rinishida aniq formula sifatida olinadi.

Sonli usullar orasida eng ko'p qo'llaniladiganlari — chekli farqlar usuli (FDM), chekli elementlar usuli (FEM) va chekli hajmlar usuli (FVM). Chekli farqlar usuli sodda va samarali bo'lib, to'g'ri to'rtburchak geometriyali sohalarda maqbul. Chekli elementlar usuli murakkab geometriyaga ega sohalarda ustunlik qiladi va zamonaviy ANSYS, COMSOL, OpenFOAM dasturiy vositalarining asosini tashkil etadi.

So'nggi yillarda mashinali o'qitish va sun'iy neyron tarmoqlar yordamida differensial tenglamalarni yechish usullari (Physics-Informed Neural Networks — PINN) ham rivojlanmoqda. Bu usullar, ayniqsa, murakkab geometriyali sohalarda va katta o'lchamli masalalarda an'anaviy usullarga nisbatan samaraliroq bo'lishi mumkin. Biroq PINN usulining aniqlik kafolatlari va barqarorligi hali to'liq o'rganilmagan.

4.5. Amaliy qo'llanishlar

Differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar amaliyotda juda keng qo'llaniladi. Quyidagi sohalarda bu masalalar muhim o'rin egallaydi:

- Issiqlik va massa uzatish jarayonlari — issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Dirixle (berilgan harorat) yoki Neyman (berilgan issiqlik oqimi) shartlari bilan qo'yilgan masalalar. Sanoat pechlarini, issiqlik almashinuvchilarni va binolarning issiqlik izolyatsiyasini hisoblashda qo'llaniladi.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

- Elektromagnit maydon hisobi — Laplas va Puasson tenglamalari uchun lokal chegaraviy shartlar. Kondensatorlar, o'tkazgichlar va antennalarning elektr maydonini modellashtishda muhim ahamiyatga ega.
- Mexanik deformatsiyalar tahlili — elastiklik nazariyasining tenglamalari uchun lokal shartlar (qistirilgan uch, erkin uch, qisman qo'llab-quvvatlash). Konstruksiyalarning mustahkamlik va chidamliligini hisoblashda keng qo'llaniladi.
- Suyuqlik va gazlar oqimi — Navier-Stokes tenglamalari uchun lokal chegaraviy shartlar (qattiq devor, kirishdan chiqish). Aerodinamika, gidravlika va iqlim modellashtirish dasturlarida foydalaniladi.

O'zbekiston ilmiy muhitida ham bu soha bo'yicha tadqiqotlar olib borilmoqda. Toshkent davlat texnika universiteti va O'zbekiston Milliy universiteti olimlari differensial tenglamalar uchun turli xil lokal va nolokal chegaraviy masalalarning yechish usullari va yechim xossalarini o'rganganlar va bu yo'nalishda yangi natijalar olganlar.

5. XULOSA VA TAKLIFLAR

Differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar matematik fizika va hisoblash matematikasining fundamental bo'limi bo'lib, nazariy va amaliy ahamiyati yuksak. Ushbu maqolada quyidagi asosiy natijalar olindi va xulosalar shakllandi:

- Lokal shartli masalalarning ta'rifi va to'rtta asosiy turi (Dirixle, Neyman, Robin, ko'p nuqtali) tizimli bayon etildi — har birining fizik mazmuni va matematik xossalari ko'rsatildi.
- Yechimning mavjudligi va yagonaligiga oid asosiy shartlar o'rganildi — Shturm-Liuvill nazariyasi va Lax-Milgram teoremasi doirasida masalaning to'g'ri qo'yilishi tahlil qilindi.
- Analitik yechish usullari (Green funksiyasi, Furye usuli, xos funksiyalar bo'yicha yoyish) va sonli usullar (FDM, FEM, FVM, PINN) tizimlashtirilib, ularning qo'llanish sohalari aniqlandi.
- Amaliy qo'llanishlarning to'rtta asosiy yo'nalishi — issiqlik uzatish, elektromagnit maydon, mexanik deformatsiya va suyuqlik oqimi — ko'rib chiqildi va ularning muhandislik ahamiyati ko'rsatildi.

Kelgusidagi tadqiqotlar uchun quyidagi takliflar ilgari suriladi:

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

- Kvant hisoblash usullarini differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalarni yechishga tatbiq etish istiqbolli yo'nalish hisoblanadi — bu usullar ayrim sinfdagi masalalarda eksponent tezlanishni ta'minlashi mumkin.
- PINN usulining lokal shartli masalalar uchun aniqlik kafolatlari va konvergensiya xossalarini nazariy asoslash hozirgi kunda dolzarb matematik muammo bo'lib qolmoqda.
- Ko'p o'lchamli va nolinear lokal shartli masalalar uchun samarali adaptiv sonli sxemalarni ishlab chiqish muhandislik amaliyoti uchun zarur hisoblanadi.

Xulosa qilib aytganda, differensial tenglamalar uchun lokal shartli masalalar o'z dolzarbligini va ilmiy qiziqishlarni yanada oshira borib o'rganib borishni talab etadi. Hisoblash texnikasining jadal rivojlanishi va sun'iy intellekt usullarining kirib kelishi bu sohadagi imkoniyatlarni yanada kengaytirib boradi.

ADABIYOTLAR / ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Vladimirov V.S. Matematicheskaya fizika uravneniyalari. — Moskva: Nauka, 1988.
2. Coddington E.A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. — New York: McGraw-Hill, 1955.
3. Evans L.C. Partial Differential Equations. — AMS, 2010.
4. Samarskiy A.A. Differensial tenglamalarning sonli usullari. — Toshkent: O'qituvchi, 1992.
5. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. — Springer, 1985.
6. Rannacher R. Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. — Springer, 2000.
7. Rashidov A.R. Differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. — Toshkent: Fan, 2005.