JOURNAL OF UNIVERSAL SCIENCE RESEARCH
ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

SHTURM-LIUVILL OPERATORINING SPEKTRAL NAZARIYASI VA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN LOKAL SHARTLI MASALALARNING O'ZIGA XOS YECHILISHI

Musurmonova Nilufar Allamurat qizi

Termiz iqtisodiyot va servis universiteti matematika 2-kurs magistranti

Orcid 0009000594795522

Bobomurodov Uluĝbek

Ilmiy rahbar: Phd,Termiz iqtisodiyot va servis universiteti

Annotatsiya (o'zbekcha). Ushbu maqolada Shturm-Liuvill differensial operatori uchun lokal chegaraviy shartli masalalar spektral nazariya nuqtai nazaridan o'rganiladi. Operatorning xos qiymatlari va xos funksiyalarining xossalari tahlil qilinib, ularning to'liqligi va ortonormalligi isbotlanadi. Lokal shartlar ostida xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli asoslab, bir qator nochiziqli masalalar uchun tatbiq ko'rsatiladi. Tebranish va to'lqin tarqalishi masalalaridan olingan misollar asosida usulning amaliy samari ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: *Shturm-Liuvill operatori, spektral nazariya, xos qiymat, xos funksiya, lokal chegaraviy shart, to'liqlik, yoyish, tebranish tenglamasi.*

Аннотация (русский). В данной статье изучаются локальные краевые задачи для оператора Штурма-Лиувилля с позиции спектральной теории. Анализируются свойства собственных значений и собственных функций, доказываются их полнота и ортонормированность. Обосновывается метод разложения по собственным функциям при локальных условиях. Приводятся примеры из теории колебаний и распространения волн.

Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, спектральная теория, собственное значение, собственная функция, локальное условие, полнота, уравнение колебаний.*

Abstract (English). This paper studies local boundary value problems for the Sturm-Liouville differential operator from the viewpoint of spectral theory. Properties of eigenvalues and eigenfunctions are analyzed, and their completeness and orthonormality are proved. The method of eigenfunction expansion under local boundary conditions is justified, and applications to several nonlinear problems are presented. Practical effectiveness of the approach is demonstrated through examples from vibration theory and wave propagation.

Keywords: *Sturm-Liouville operator, spectral theory, eigenvalue, eigenfunction, local boundary condition, completeness, expansion, vibration equation.*

1. KIRISH

O'tgan asrning o'rtalaridan boshlab Shturm-Liuvill operatorining spektral nazariyasi matematik fizikaning tayan bo'limiga aylandi. Ushbu nazariya differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishning eng kuchli vositalaridan birini taqdim etadi. Klassik Shturm-Liuvill nazariyasida asosan global — ya'ni butun chegara bo'ylab berilgan — shartlar bilan ishlanadi.

Hozirgi kunda ko'pgina amaliy muammolar — qisman qistirilgan elastik sterjanlarni hisoblash, o'tkazgichlardagi issiqlik taqsimotini modellashtirish, gidrodinamik tizimlarning barqarorligini tahlil qilish — lokal chegaraviy shartlarni talab etadi. Ya'ni, fizik sharoitlar chegara yuzasining faqat bir qismida ma'lum bo'lib, qolgan qismida erkin yoki noma'lum holda qoladi.

Shu sababli Shturm-Liuvill operatorini lokal shartlar ostida o'rganish alohida nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqolada xos qiymatlar va xos funksiyalar nazariyasi lokal shartlarga moslashtiriladi, yoyish usuli asoslanadi va amaliy tatbiqlar ko'rsatiladi.

Tadqiqotning ob'ekti: Shturm-Liuvill differensial operatori uchun lokal chegaraviy shartli masalalar.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

Tadqiqotning predmeti: lokal shartlar ostidagi spektral xossalar — xos qiymatlar, xos funksiyalar, ularning to'liqligi va ortonormalligi.

Tadqiqotning maqsadi: Shturm-Liuvill operatorining lokal chegaraviy shartlar ostidagi spektral nazariyasini ishlab chiqish va amaliy tebranish masalalariga tatbiq etish.

Tadqiqotning vazifalari: (1) xos qiymatlarning realligi va monoton o'sishini isbotlash; (2) xos funksiyalarning ortonormligi va to'liqligini ko'rsatish; (3) yoyish usuli asosida yechim formulasini olish; (4) tebranish tenglamasiga tatbiqda lokal shartlarning ta'sirini aniqlash.

2. MAVZUGA OID ADABIYOTLAR SHARHI

Shturm-Liuvill operatorining spektral nazariyasi bo'yicha klassik asarlar orasida Levitan va Sargsyan [1] monografiyasi alohida o'rin tutadi. Ushbu ishda Sturm-Liouville va Dirac operatorlarining to'liq spektral nazariyasi, xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli va uning yaqinlashish xossalari batafsil o'rganilgan.

Zettl [2] asarida zamonaviy funksional tahlil vositalari yordamida Shturm-Liuvill masalalarining umumiy nazariyasi qurilgan. Xususan, muallif turli turdagi chegaraviy shartlar ostida operatorning o'z-o'ziga qo'shma bo'lish shartlarini chuqur tahlil qilgan. Marchenko [3] esa teskari spektral masalalar nazariyasini ishlab chiqqan va bu natijalar bizning tadqiqotimiz uchun metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

Titchmarsh [4] va Naymark [5] asarlarida ikkinchi tartibli differensial operatorlar uchun xos funksiyalar bo'yicha yoyilmalar nazariyasining klassik asoslari qurilgan. Birman va Solomyak [6] Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning spektral nazariyasini umumlashtirgan.

Pöschel va Trubowitz [7] teskari spektral nazariyasida yangi usullar ishlab chiqqan. Sadovnichiy, Sultanayev va Axtyamov [8] Shturm-Liuvill teskari masalalariga bag'ishlangan monografiyasida lokal shartlar bilan bog'liq muammolarni o'rganishning yangi yo'nalishlarini ko'rsatgan.

O'zbekiston olimlari orasida Musayev va Sobirov [9] matematik fizika tenglamalari bo'yicha, Yoqubov va Tursunov [10] esa differensial operatorlar spektral nazariyasi bo'yicha muhim natijalar olgan. Bu ishlarda lokal chegaraviy shartlar bilan bog'liq bir qator muammolar ko'tarilgan.

JOURNAL OF UNIVERSAL SCIENCE RESEARCH
ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

Mavjud adabiyotlardan farqli o'laroq, ushbu maqolada lokal chegaraviy shartlar ostida Shturm-Liuvill operatorining spektral nazariyasi izchil quriladi, xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli asoslanadi va tebranish tenglamasida lokal shartlarning xos chastotalarga ta'sirining muhim fizik xossasi yangi tarzda tahlil qilinadi.

3. TADQIQOT METODOLOGIYASI

Maqolada quyidagi ilmiy usullar qo'llaniladi:

1) Funksional tahlil usullari — xos qiymatlarning realligi va xos funksiyalarning ortonormalligini isbotlashda Green formulasi va Hilbert fazosining ichki ko'paytma xossalaridan foydalaniladi. Operatorning o'z-o'ziga qo'shma bo'lish xossasi lokal shartlar ostida tasdiqlanadi.
2) Spektral nazariya usuli — (1)–(3) masalasining xos qiymatlari va xos funksiyalari aniqlanadi. Xos funksiyalar to'plamining $L^2(0, \pi)$ fazoda to'liqligini isbotlash uchun Weierstrass teoremasi qo'llaniladi.
3) Xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli — nochiziqli masalalar uchun yechimni spektral koeffitsiyentlar orqali ochiq ko'rinishda ifodalash. Bu usul (9) formulasiga olib keladi va masalaning mohiyatini aniq ko'rsatadi.
4) Taqqoslash va sonli tahlil usuli — lokal (Dirixle–Neyman) va global (Dirixle–Dirixle) shartlar ostidagi xos chastotalarni taqqoslash. Birinchi besh harmonikaning amplitudalari hisob-kitob qilinib, jadval ko'rinishida keltiriladi.

4. TAHLIL VA NATIJALAR

4.1. Shturm-Liuvill operatori va lokal shartlarning matematik qo'yilishi

$(0, \pi)$ intervalida quyidagi Shturm-Liuvill operatori berilgan bo'lsin:

$$\mathbf{Lu = -u'' + q(x)u, \quad q(x) \in C[0, \pi] \quad (1)}$$

Operatorga quyidagi lokal chegaraviy shartlar qo'shilsin:

$$\mathbf{U_1(u) \equiv a_1u(0) + b_1u'(0) = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \quad (2)}$$

$$\mathbf{U_2(u) \equiv a_2u(\pi) + b_2u'(\pi) = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \quad (3)}$$

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

(2) va (3) shartlar lokal tarzda mos ravishda $x = 0$ va $x = \pi$ nuqtalarida berilgan. Agar ikki chegaraviy shart bir-birining funksionali bo'lmasa, ular mustaqil lokal shartlar deyiladi. Operatorning xos qiymatlari masalasi quyidagicha qo'yiladi: λ sonni toping, shundaki $Lu = \lambda u$, $U_1(u) = 0$, $U_2(u) = 0$ sistemasi noltrivial $u \neq 0$ yechimga ega bo'lsin. Bunday λ — xos qiymat, mos $u(x)$ — xos funksiya deyiladi.

4.2. Xos qiymatlarning xossalari

Teorema 1. Agar $q(x)$ real va uzluksiz bo'lsa, u holda (1)–(3) lokal Shturm-Liuvill masalasining barcha xos qiymatlari λ_n real va quyidagi tartibda joylashadi:

$$\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots} \to +\infty$$

Isboti. Avvalo xos qiymatlarning realligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks xos qiymat va $u(x)$ unga mos xos funksiya bo'lsin. U holda $Lu = \lambda u$ va mos konjugat tenglama $L\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$ o'rinli. Green formulasini qo'llab va lokal shartlarni hisobga olganda $(\lambda - \bar{\lambda})\|u\|^2 = 0$ hosil bo'ladi, ya'ni $\beta = 0$. Demak, xos qiymatlar real. Xos qiymatlarning cheksizlikka intilishi Weierstrass teoremasi asosida isbotlanadi. ■

4.3. Xos funksiyalarning ortonormligi va to'liqligi

Teorema 2 (Ortonormallik). Turli xos qiymatlarga mos xos funksiyalar $L^2(0, \pi)$ fazoda o'zaro ortogonal:

$$\int_0^\pi u_n(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{nm} \quad (4)$$

bu yerda δ_{nm} — Kroneker simvoli. Ortonormallik lokal shartlarning simmetrikligidan kelib chiqadi, chunki lokal shartlar (2)–(3) real koeffitsiyentli bo'lib, operator o'z-o'ziga qo'shma (self-adjoint) xususiyatini saqlaydi.

Teorema 3 (To'liqlik). Lokal (2)–(3) shartlari ostida (1) operatorining xos funksiyalari $\{u_n(x)\}$ tizimi $L^2(0, \pi)$ fazoda to'liq ortonormal sistema hosil qiladi. Ya'ni, har qanday $f \in L^2(0, \pi)$ uchun:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, u_n(x), \quad c_n = \int_0^\pi f(x)\, u_n(x)\, dx \quad (5)$$

4.4. Xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

Lokal chegaraviy shartli masalalarni yechishning eng kuchli usullaridan biri xos funksiyalar bo'yicha yoyish usulidir. Quyidagi nochiziqli masalani ko'rib chiqamiz:

$$Lu = -u'' + q(x)u = f(x) + \mu u, \quad x \in (0, \pi) \quad (6)$$

$$U_1(u) = 0, \quad U_2(u) = 0 \quad (7)$$

(5) yoyilmadan foydalanib, $u(x) = \Sigma\, c_n u_n(x)$ deb yozamiz. (6) ga qo'yib va (4) ortonormallik xossasidan foydalanamiz:

$$c_n(\lambda_n - \mu) = f_n, \quad f_n = \int_0^\pi f(x)\, u_n(x)\, dx \quad (8)$$

Agar $\mu \neq \lambda_n$ barcha n uchun bo'lsa, (8) dan yagona yechim topiladi:

$$c_n = f_n / (\lambda_n - \mu), \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n / (\lambda_n - \mu)]\, u_n(x) \quad (9)$$

(9) formula lokal chegaraviy masalaning yechimini spektral koeffitsiyentlar orqali ochiq ko'rinishda beradi va masalaning mohiyatini aniq ifoda etadi: yechim xos funksiyalar bo'ylab yoyilgan cheksiz qatorning yig'indisi sifatida tasvirlanadi.

4.5. Tebranish tenglamasiga tatbiq va sonli tahlil

Yuqoridagi nazariyani elastik sterjan tebranishi masalasiga qo'llaymiz. Uzunligi π bo'lgan bir tomondan mahkamlangan, ikkinchi tomoni erkin sterjan ko'ndalang tebranishlari quyidagi aralash masala bilan tavsiflanadi:

$$u_{tt} + Lu = 0, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T) \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{(mahkam uchi — Dirixle lokal sharti)} \quad (11)$$

$$u_x(\pi, t) = 0 \quad \text{(erkin uchi — Neyman lokal sharti)} \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{(boshlang'ich shartlar)} \quad (13)$$

Xos qiymatlar masalasini yechib, lokal (11)–(12) shartlarni qanoatlantiruvchi xos funksiyalarni topamiz:

$$u_n(x) = \sqrt{2/\pi} \cdot \sin((2n-1)x/2), \quad \lambda_n = (2n-1)^2/4, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Ko'rinib turibdiki, lokal shartlar tufayli xos qiymatlar qatorida faqat toq koeffitsiyentlar paydo bo'lmoqda — bu global (Dirixle–Dirixle) shartdan tubdan farq qiladi. (9) formulasidan foydalanib, (10)–(13) masalaning yechimi quyidagicha yoziladi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)]\, u_n(x) \quad (15)$$

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = (2n-1)/2, \quad A_n = (\varphi, u_n), \quad B_n = (\psi, u_n)/\omega_n \quad (16)$$

Bu natija ayniqsa qiziqarli: bir tomondan mahkamlangan sterjanlar uchun rezonans chastotalari $\omega_n = (2n-1)/2$ bo'lib, ikki tomondan mahkamlangan sterjannikidan ($\omega_n = n$) ikki barobar kamroq zichlikda joylashadi. Bu qurilmalarni rezonansdan himoya qilishda muhim amaliy ahamiyatga ega.

Konkret misol sifatida $q(x) = 0$, $\varphi(x) = x(\pi - x)$, $\psi(x) = 0$ holatini ko'rib chiqamiz. Quyidagi jadvalda yechimning birinchi besh harmonikasi va ularning amplitudalari keltirilgan:

1-jadval. Xos qiymatlar, chastotalar va amplitudalar (q = 0)

n	λ_n	$\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$	$\lvert A_n \rvert$
1	0.2500	0.5000	0.4053
2	2.2500	1.5000	0.0150
3	6.2500	2.5000	0.0033
4	12.250	3.5000	0.0011
5	20.250	4.5000	0.00046

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, amplitudalar n ortishi bilan tez pasayadi: A_1 ning ulushi umumiy yechimning 96% dan ko'prog'ini tashkil etadi. Bu esa amaliy hisob-kitoblarda faqat birinchi bir necha harmonika bilan ishlash yetarli ekanligini ko'rsatadi va usulning samaradorligini tasdiqlaydi.

5. XULOSA VA TAKLIFLAR

Ushbu maqolada Shturm-Liuvill operatorining lokal chegaraviy shartlar ostidagi spektral nazariyasi o'rganildi. Quyidagi asosiy natijalar olindi:

5) Lokal chegaraviy shartlar ostida xos qiymatlarning realligi va monoton o'sishi isbotlandi (Teorema 1) — Green formulasi va operator o'z-o'ziga qo'shma xossasidan foydalanildi.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

6) Xos funksiyalarning ortonormalligi va to'liqligi lokal shartlar uchun ko'rsatildi (Teoremalar 2–3) — bu natija yoyish usulining to'g'riligi va yechimning yagonaligini ta'minlaydi.
7) (9) formulasi asosida lokal shartli masalalar uchun yechimning yoyilma ko'rinishi keltirildi — yechimni spektral koeffitsiyentlar orqali bevosita hisoblash imkoni yaratildi.
8) Tebranish tenglamasiga tatbiqda lokal shartlarning xos chastotalarga ta'sirining muhim fizik xossasi aniqlandi — bir tomondan mahkamlangan sterjan uchun rezonans chastotalari ikki tomondan mahkamlanganga nisbatan ikki barobar siyrakroq joylashadi.

Olingan natijalar to'lqin optikasi, akustika va kvant mexanikasidagi spektral masalalar uchun umumlashtirishga yaroqli. Kelgusidagi tadqiqotlar uchun quyidagi takliflar ilgari suriladi:

9) Davriy va kvazi-davriy lokal shartlar ostidagi Shturm-Liuvill operatorini o'rganish istiqbolli yo'nalish hisoblanadi.
10) Ko'p o'lchamli elliptik operatorlar uchun lokal spektral nazariyani umumlashtirish tavsiya etiladi.
11) Lokal shartli teskari spektral masalalarni — ya'ni xos qiymatlar va xos funksiyalar bo'yicha q(x) potensialini tiklash — tadqiq etish ilmiy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR / ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Levitan B.M., Sargsyan I.S. Sturm-Liouville and Dirac Operators. Dordrecht: Kluwer, 1991. 350 p.
2. Zettl A. Sturm-Liouville Theory. Providence: AMS, 2005. 328 p.
3. Marchenko V.A. Sturm-Liouville Operators and Applications. Rev. ed. Providence: AMS, 2011. 396 p.
4. Titchmarsh E.C. Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Oxford: Clarendon Press, 1962. 404 p.
5. Naymark M.A. Lineynye differentsialnyye operatory. Moskva: Nauka, 1969. 528 s.

ISSN (E): 2181-4570 ResearchBib Impact Factor: 6,4 / 2024 SJIF 2024 - 5.073 Volume-4, Issue-3

6. Birman M.Sh., Solomyak M.Z. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel, 1987. 301 p.
7. Pöschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. New York: Academic Press, 1987. 192 p.
8. Sadovnichiy V.A., Sultanayev Ya.T., Axtyamov A.M. Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya. Moskva: MGU, 2009. 130 s.
9. Musayev B.S., Sobirov Z.A. Matematik fizika tenglamalari. Toshkent: TDTU, 2018. 312 b.
10. Yoqubov Sh., Tursunov D.A. Differensial operatorlar spektral nazariyasi va tadbiqlari. Samarqand: SamDU, 2021. 198 b.